Vernetzende Überlegungen zu „Regression – Rekursion – Funktion“

Vortrag bei der Lehrerfortbildung

anlässlich der Tagung des AK Vernetzungen im Mathematikunterricht

Darmstadt, 3. Mai 2013

buerker@online.de

Gliederung

- Regression: Beispiele zur Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate
- Rekursion: Beispiele zum exponentiellen und beschränkten Wachstum
- Lineare Rekursionsgleichung und explizite Funktionsdarstellung
- Sparen und Tilgen
- Schrittstabile Funktionen

Literatur

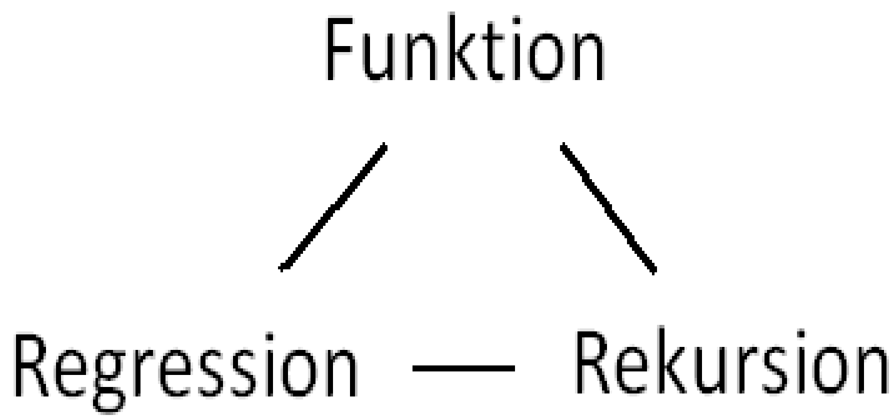
Beiträge im Vernetzungsband 3:

Bestimmung einer Ausgleichsgeraden nach dem Gauß'schen Minimumprinzip

Modellierung von Spar- und Tilgungsvorgängen

Das Begriffsdreieck Regression – Rekursion – Funktion

- Meraner Konferenz von 1905:
- ***Zentrale Rolle des Funktionsbegriffs im MU***
- Bildungsstandards 2003:
  Funktionales Denken als Leitidee des MU



Regression: Von Daten zur Funktion

- Historisches Beispiel:
- ***Die Entdeckung des Kleinplaneten Ceres***

Beispiel für eine lineare Regression

- Aufgabe:
- Gegeben seien die Punkte (Daten einer Messreihe)
- $P_1(0|2)$, $P_2(2|3)$, $P_3(4|5)$, $P_4(6|6)$.
- Bestimme die **Ausgleichsgerade**.

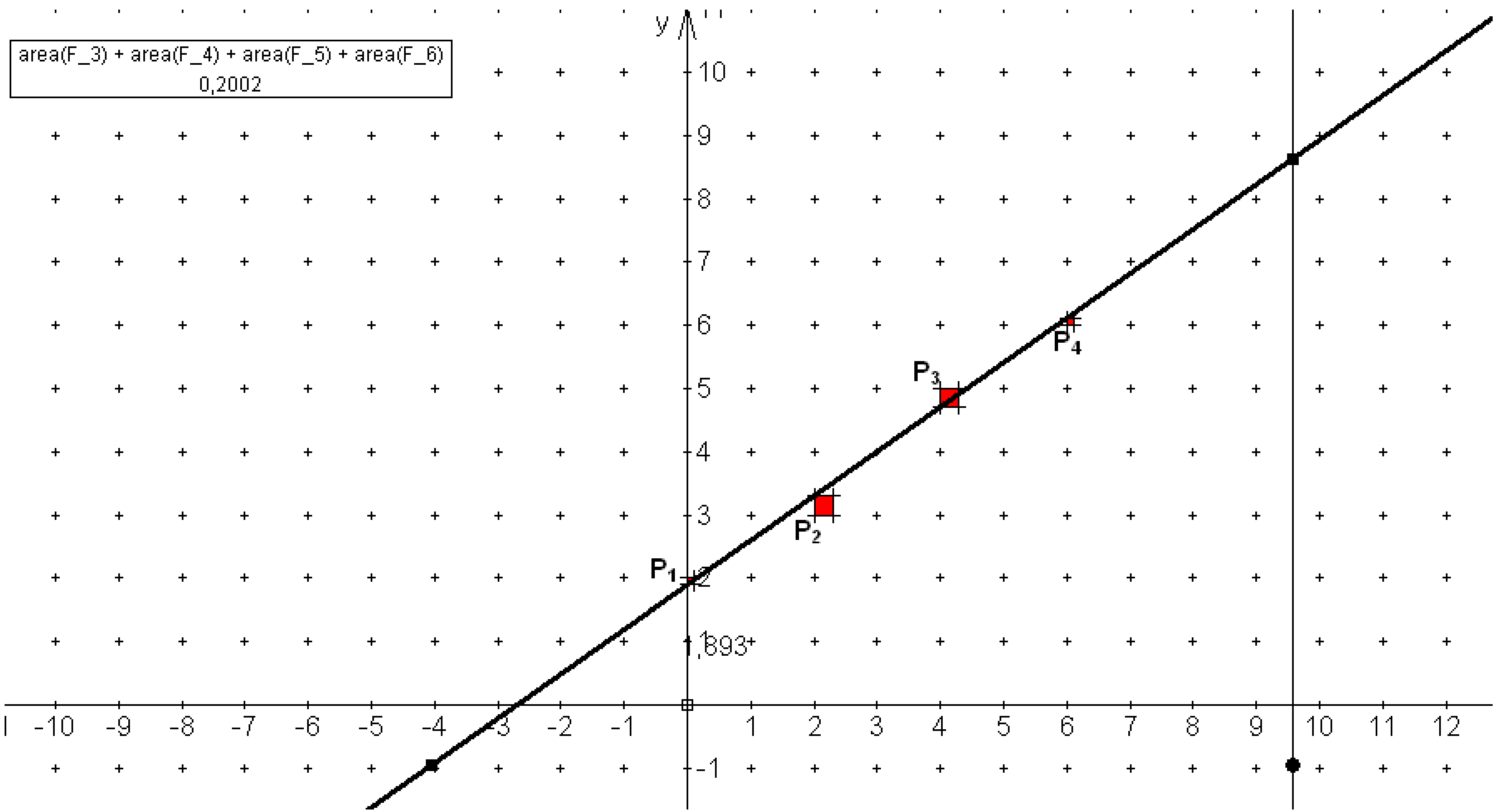
Spielerisches Ermitteln der Ausgleichsgerade

$$T(m, c) = (m \cdot 0 + c - 2)^2 + (2m + c - 3)^2$$
$$+ (4m + c - 5)^2 + (6m + c - 6)^2.$$

Zwei Variable!

Bedingung zwischen ***m*** und ***c*** notwendig!

Veranschaulichung der Ausgleichsgeraden in Dynageo



Schwerpunkt einer Punktwolke

Der Schwerpunkt einer Punktwolke wie z. B. $P_1(x_1|y_1), \ldots, P_n(x_n|y_n)$ ist $S\,(x_S \mid y_S)$ mit

$x_S = 1/n \cdot (x_1 + \ldots + x_n)$

$y_S = 1/n \cdot (y_1 + \ldots + y_n)$

Bei den gegebenen 4 Datenpunkten ist

S(3|4) der Schwerpunkt der Punktwolke.

Bedingung

- ***Der Schwerpunkt der Punktwolke liegt auf der Ausgleichsgeraden!***

Punktprobe mit dem Schwerpunkt

- Schwerpunkt $S(3|4)$
- Punktprobe: $4 = 3m + c$ oder $c = 4 - 3m$

Zu minimierender Term

$$T(m, c) = (m\cdot 0 + c - 2)^2 + (2m + c - 3)^2$$
$$+ (4m + c - 5)^2 + (6m + c - 6)^2$$

$$T(m) = (m\cdot 0 + [4 - 3m] - 2)^2$$
$$+ (2m + [4 - 3m] - 3)^2$$
$$+ (4m + [4 - 3m] - 5)^2$$
$$+ (6m + [4 - 3m] - 6)^2$$

Vereinfachter Term

$$T(m) = 2(3m-2)^2 + 2(m-1)^2$$
$$= 20m^2 - 28m + 10$$

Minimum des Terms für m = 0,7

Daraus: c = 1,9

Ausgleichsgerade: **y = 0,7x + 1,9**

Rekursion allgemein

- Umfangreiche Literatur

- Neueres Buch, schulmathematisch ausgerichtet:
    - ***Gernot Lorenz:***
    - ***Funktionale Modellierung und Rekursion***

Temperaturerhöhung

- Beispiel: Aus einem Kühlschrank wird ein Glas Wasser von 4°C herausgenommen und der Umgebungstemperatur von 20°C ausgesetzt. Der Temperaturzuwachs pro Zeiteinheit ist proportional zum Sättigungsmanko (= *Differenz zwischen Umgebungstemperatur und aktueller Temperatur (Newtonsches Temperaturgesetz*).
- Beschreibe den Temperaturverlauf

Daten

- Datenpunkte: (0|4), (1|12), (2|16), (3|18).
- Sättigungsmanko: 16 8 4 2
- p = 50%
- Temp.-zunahme: 8 4 2

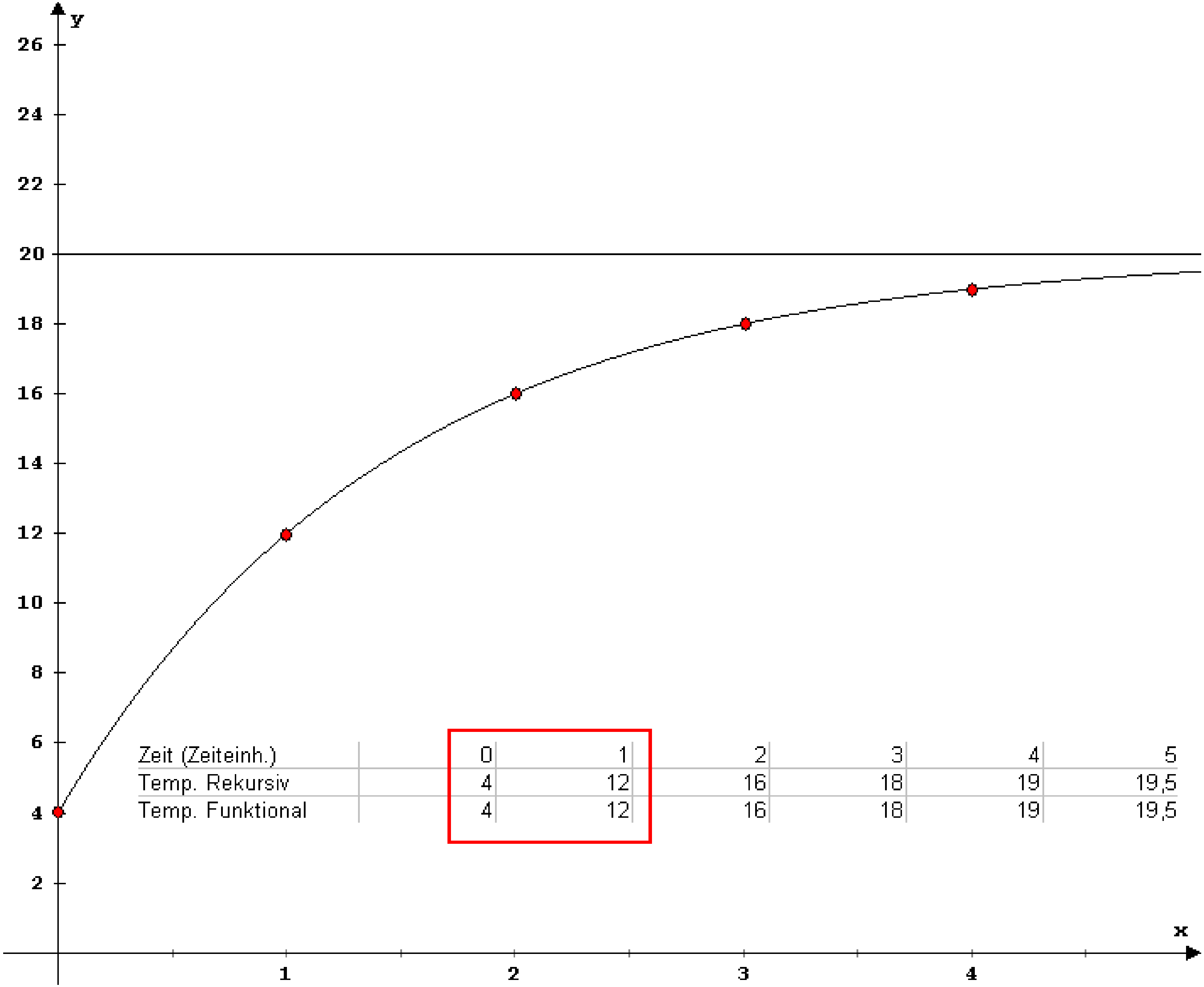
Rekursive Darstellung

- Rekursiv: $M(n+1) = 0{,}5 \cdot M(n)$ oder
- $T(n+1) = 20 - M(n+1)$
- $= 20 - 0{,}5 \cdot M(n)$
- $= 20 - 0{,}5 \cdot (20 - T(n))$
- $= 10 + 0{,}5 \cdot T(n)$
- lineare Rekursionsgleichung !

Explizite Darstellung

- Explizite Darstellung:
- Für die Werte des Sättigungsmankos gilt
- $M(n) = 16 \cdot 0{,}5^n$

- Für die Temperaturwerte gilt dann:
- $T(n) = 20 - 16 \cdot 0{,}5^n$



Zeit (Zeiteinh.)	0	1	2	3	4	5
Temp. Rekursiv	4	12	16	18	19	19,5
Temp. Funktional	4	12	16	18	19	19,5

Vergleich rekursiv - explizit

- Rekursiv: $T(n+1) = 10 + 0{,}5 \cdot T(n)$
- Explizit: $T(n) = 20 - 16 \cdot 0{,}5^n$

Hat eine Folge (a_n) mit linearer Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = qa_n + r$$

stets eine explizite Darstellung der Form

$$n \rightarrow cq^n + d \ ?$$

Die Kapitalformel

Bekannt:

Ein Anfangskapital K_0 erhöht sich nach n Jahren durch Zinseszins mit Zinssatz p auf das Endkapital

$$K_n = K_0(1 + p)^n$$

Ein erweiterter Sparvorgang

- Ein Kapital K_0 erhöht sich beim Zinssatz p
- a) durch Zins und Zinseszins und
- b) durch eine jährlich konstante Sparrate r

- Bestimme den Kapitalendwert nach n Jahren.

Rekursion

K_n = Kapital nach n Jahren

K_{n+1} = Kapital nach n+1 Jahren

$$K_{n+1} = K_n + K_n p + r$$

Wie erhält man daraus eine explizite Darstellung?

Von der rekursiven zur expliziten Darstellung

$$K_{n+1} = K_n + K_n p + r$$

$$K_{n+1} = K_n + p(K_n + r/p)$$

$$K_{n+1} \color{red}{+ r/p} = K_n \color{red}{+ r/p} + p(K_n + r/p)$$

$$K_{n+1} + r/p \;=\; K_n + r/p \quad + \; p(K_n + r/p)$$

$$K_{n+1} + r/p \;=\; (K_n + r/p)(1 + p)$$

Somit: $n \rightarrow K_n + r/p$ ist eine exponentielle Folge

$$K_n + r/p \;=\; (K_0 + r/p)(1 + p)^n$$

$$K_n \;=\; (K_0 + r/p)(1 + p)^n - r/p \quad \text{(expliz. Darst.!)}$$

$$= \; c \cdot a^n + d$$

Die Vermutung ist richtig!

Liegt einer rekursiv definierten Folge (a_n) eine lineare Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = (1+p)a_n + r, \quad p \neq 0,\ p > -1$$

zu Grunde, so hat diese eine explizite Darstellung der Form

$$a_n = c(1+p)^n + d$$

Vergleich mit der finanzmathematischen Sparformel

$$K_{n+1} = K_n + K_n p + r = K_n q + r \qquad (q = 1+p)$$

$$K_n = K_0 q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_n = K_0 \cdot (1+p)^n + \frac{r}{p} \cdot (1+p)^n - \frac{r}{p}$$

$$K_n = \left(K_0 + \frac{r}{p}\right) \cdot (1+p)^n - \frac{r}{p}$$

Vergleich der Formeln

- Kapitalratenformel (Lämpel-Formel):

$$K_n = (K_0 + \frac{r}{p})(1+p)^n - \frac{r}{p}$$

- Einfache Kapitalformel (r = 0, Max-Formel):

$$K_n = K_0 (1+p)^n$$

- Einfache Sparformel (K_0 = 0, Moritz-Formel):

$$K_n = \frac{r}{p}(1+p)^n - \frac{r}{p}$$

Näherungsformel für Verdopplungszeit

- $(1+p)^n = 2$:
- $n = \ln 2 / \ln(1+p)$
- Für kleine p gilt: $\ln(1+p) \approx p$
- Somit: $n \approx 0{,}7 / p = 70$ / Zinsfuß

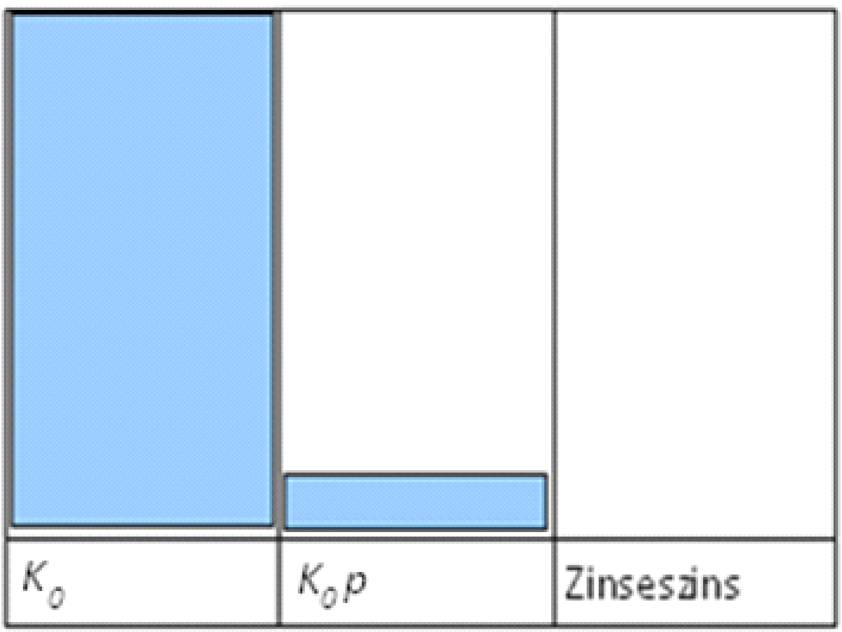
Zahlenbeispiel

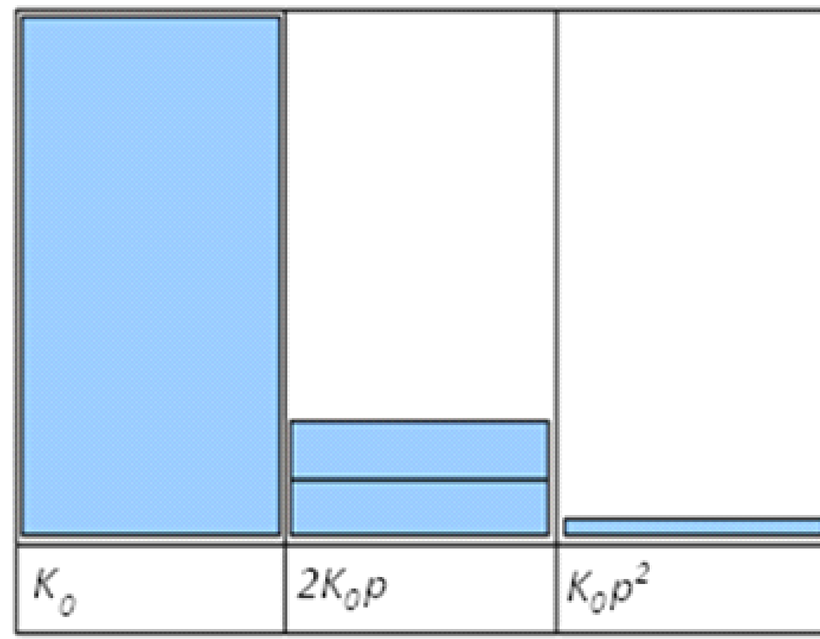
- Jemand spart am Ende eines jeden Jahres den Betrag von 400 Euro auf ein Sparkonto zum Zinssatz 4% an.
  - Nach welcher Zeit erreicht das Guthaben 10 000 € ?
  - r = 400, p = 4%, r/p = 400 / 0,04 = 10 000.

- $10\,000 \cdot 1{,}04^n - 10\,000 = 10\,000$
- $10000 \cdot 1{,}04^n = 20\,000$
- $70/4 \approx 17{,}5$
- Es dauert 17,5 Jahre, bis 10 000 Euro erreicht sind.

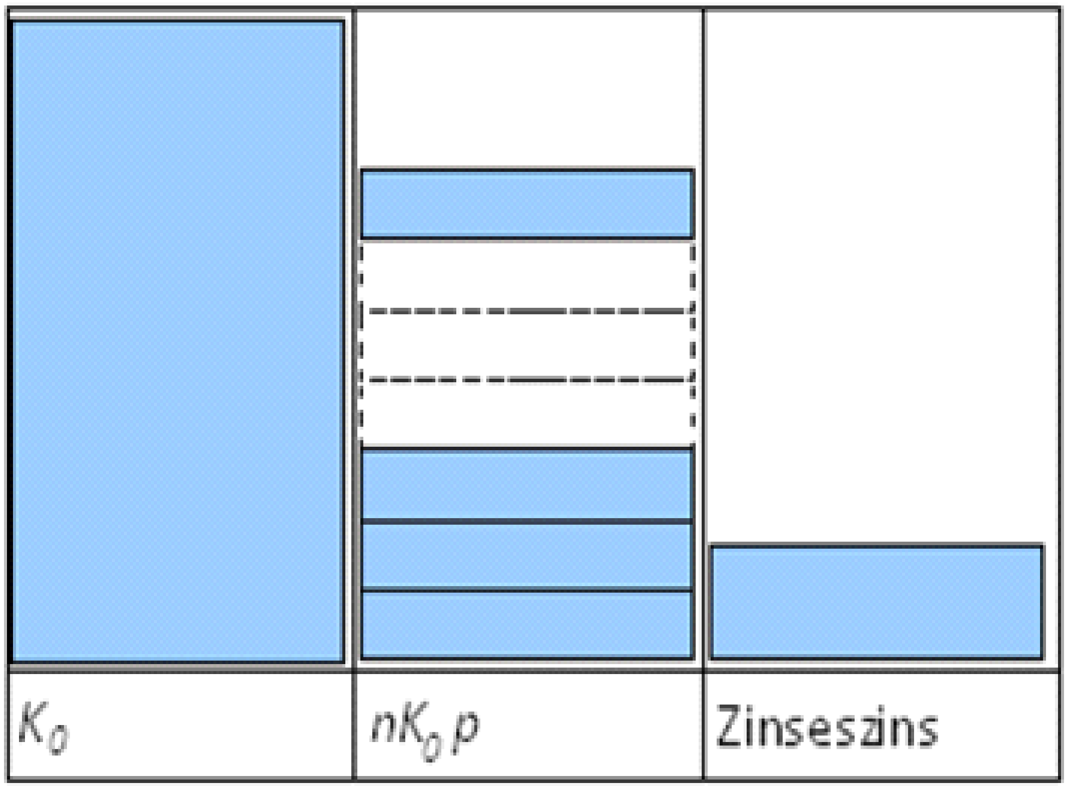
Neue Sichtweise der Kapitalformel

- 3-Säulen-Modell:





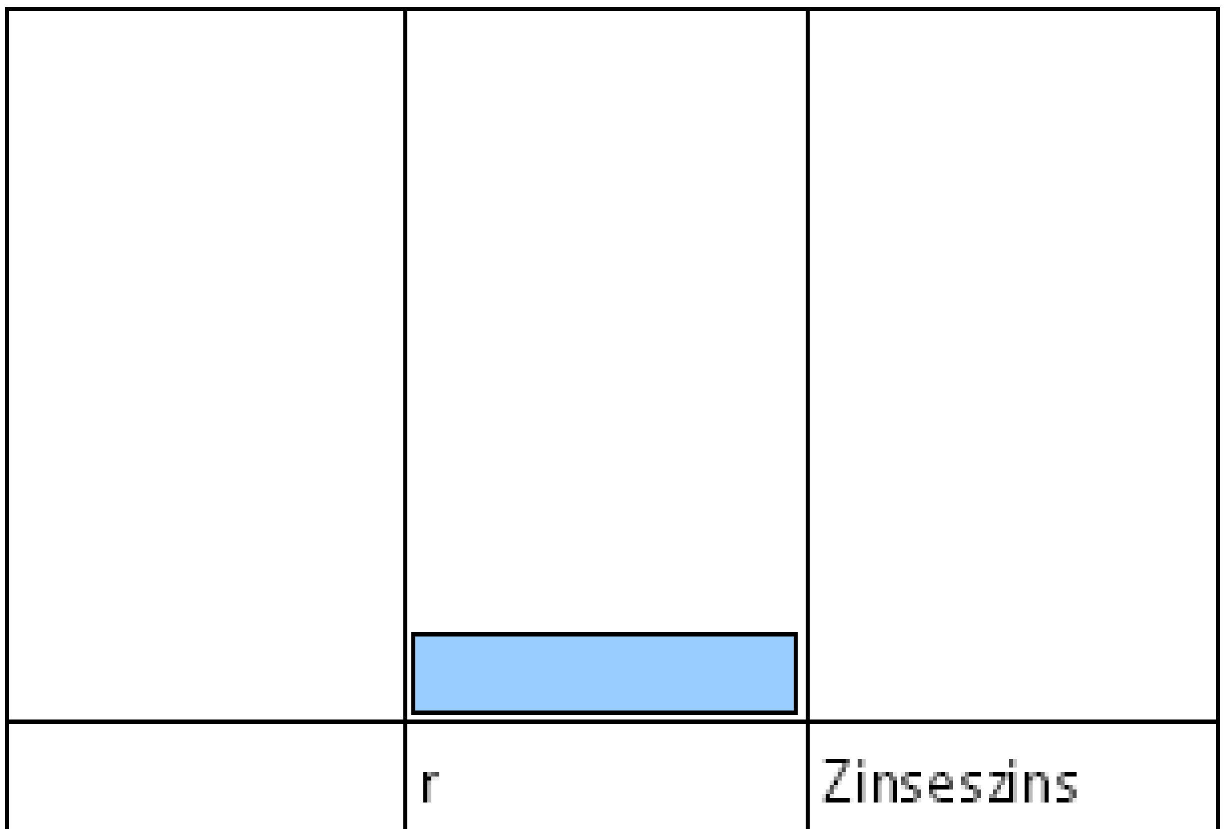
- Kapital nach n Jahren: $K_0(1+p)^n$



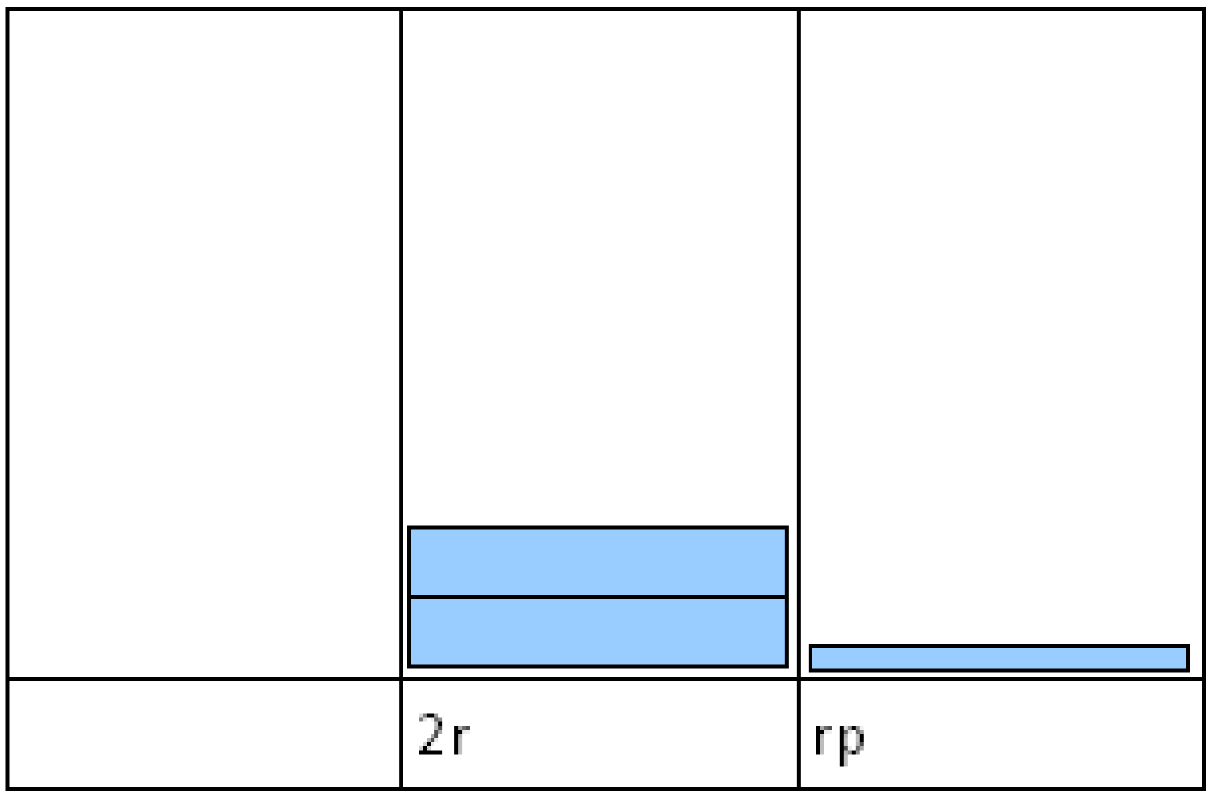
- Kapital in 2. und 3. Säule: $K_0(1+p)^n - K_0$

Entwicklung der Moritz-Formel

- Zum Ende des ersten Jahres: n = 1

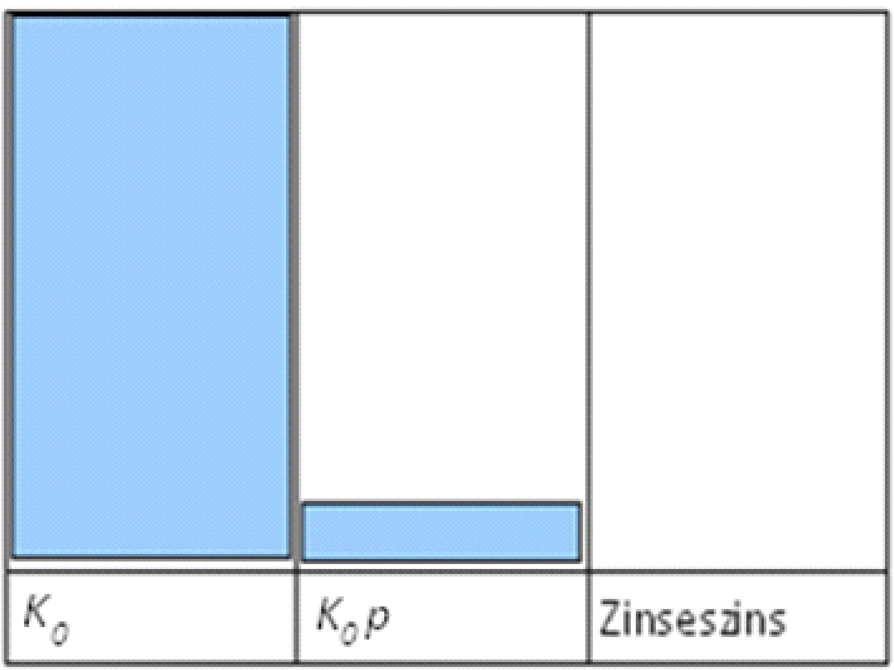


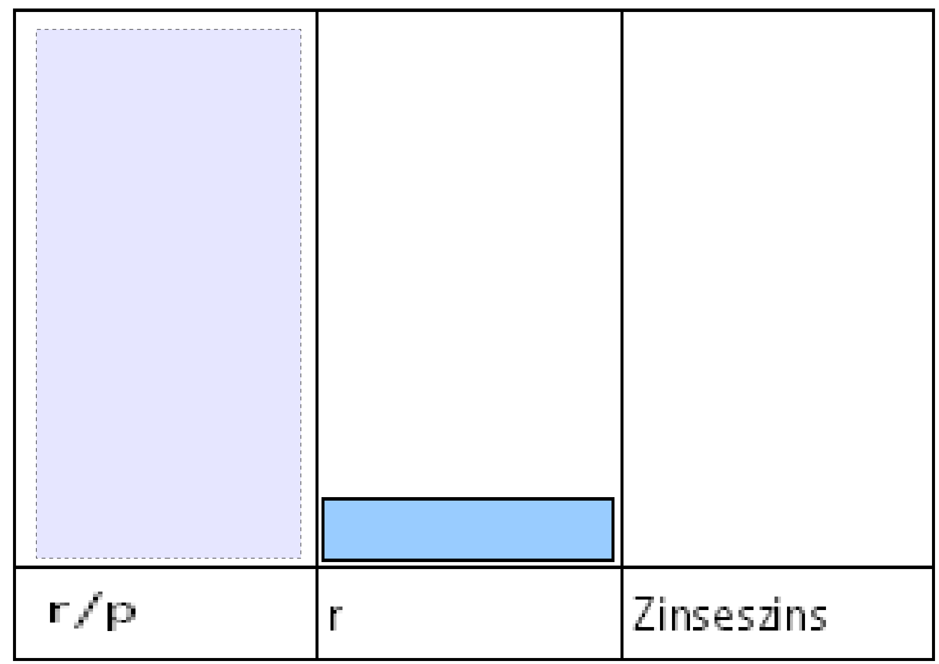
Zum Ende des zweiten Jahres: n = 2



Vergleich Max – Moritz

- Max Moritz

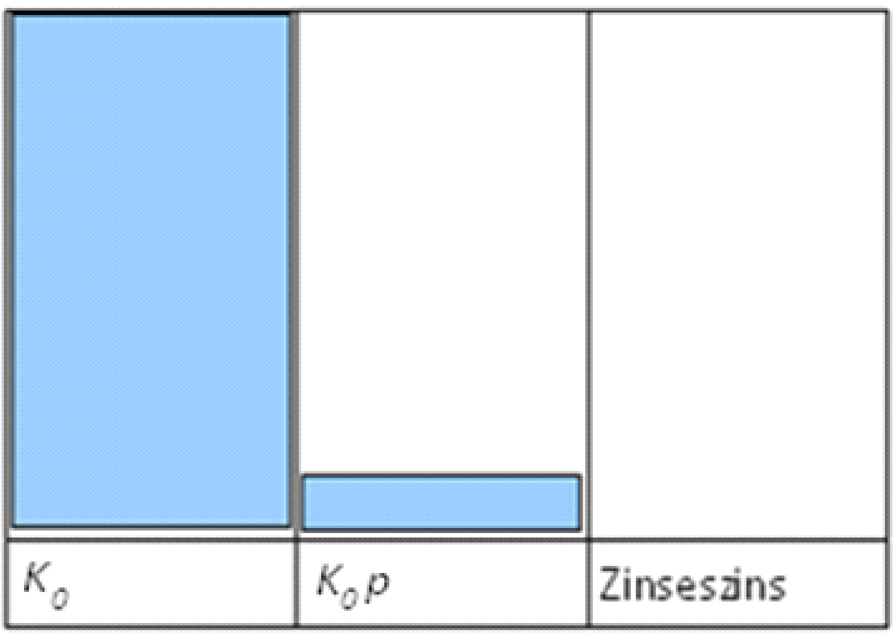


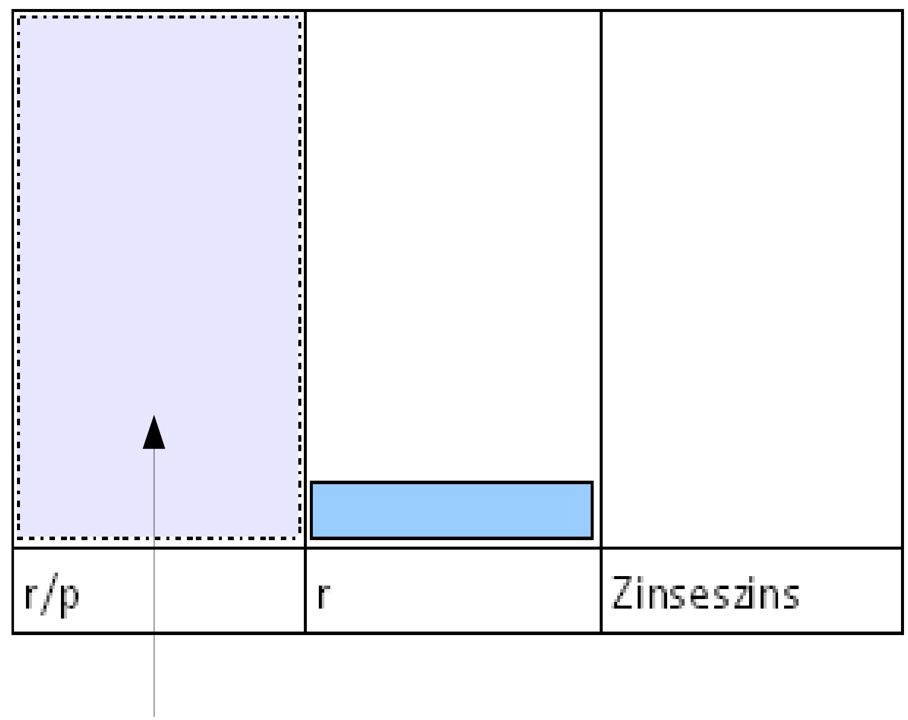


Gedachtes Anfangsguthaben
so, dass $K_g p = r$

Vergleich Max – Moritz

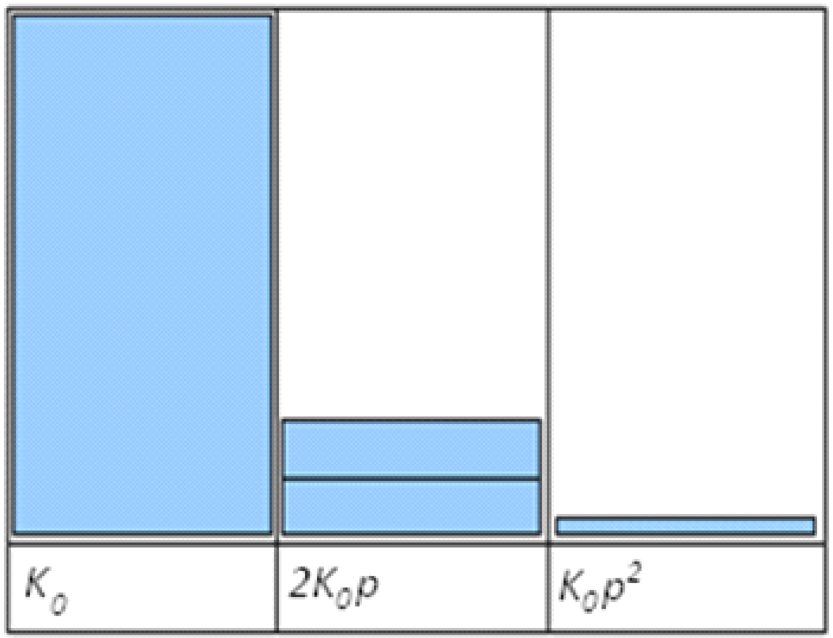
- Max Moritz

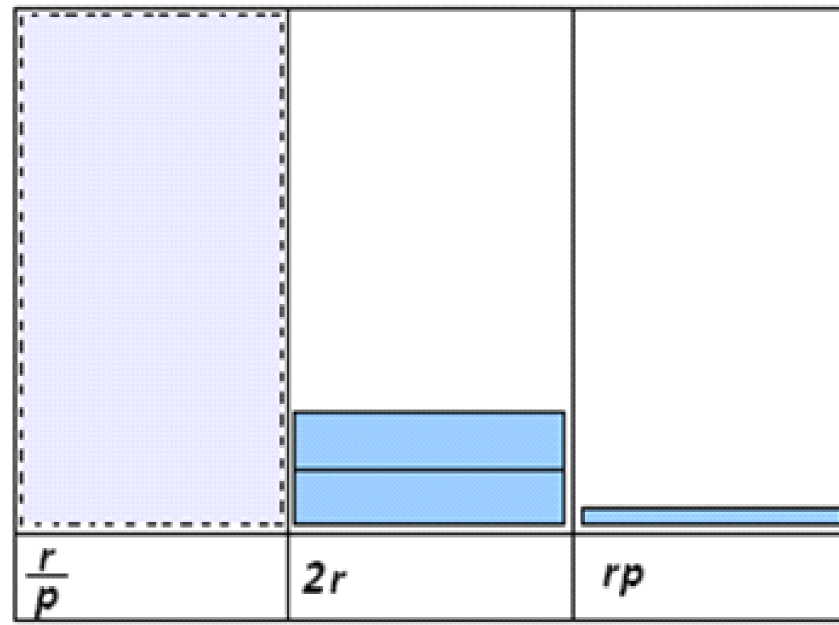




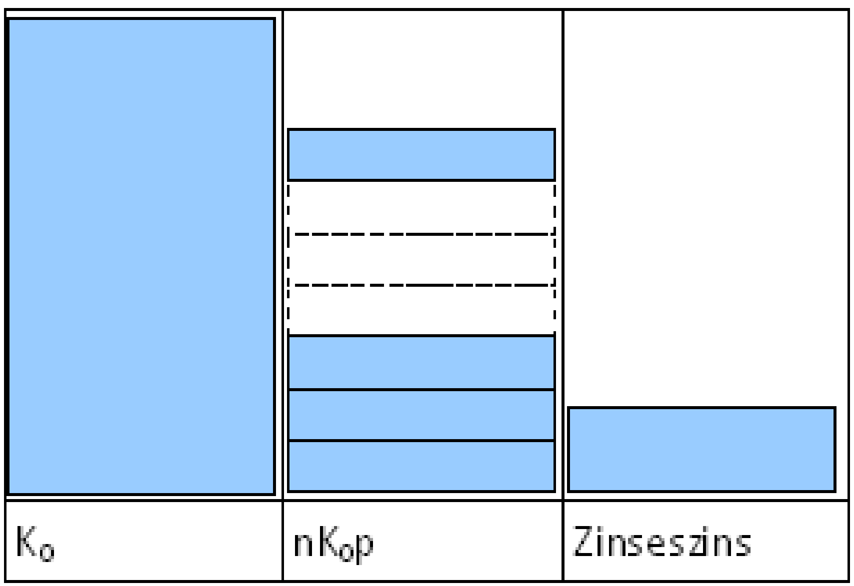
Gedachtes Anfangsguthaben
so, dass $K_g p = r$

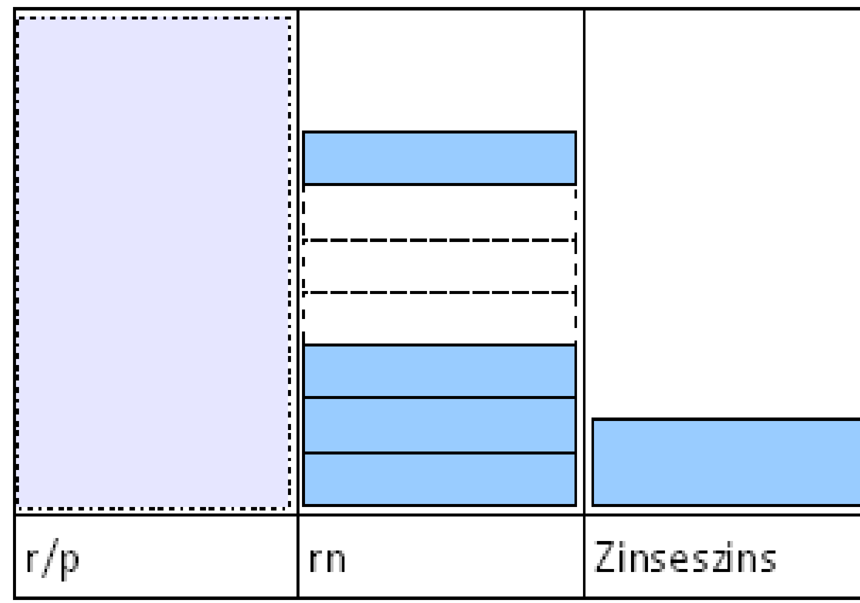
Herleitung der Moritz-Formel mit dem 3-Säulen-Modell





Moritz-Formel





Angespartes Kapital nach n Jahren: $$\frac{r}{p}(1+p)^n - \frac{r}{p}$$

Max + Moritz = Lämpel

$$K_n = \underbrace{K_0 \cdot (1+p)^n}_{\text{Max}} + \underbrace{\frac{r}{p} \cdot (1+p)^n - \frac{r}{p}}_{\text{Moritz}}$$

$$K_n = \underbrace{\left(K_0 + \frac{r}{p}\right) \cdot (1+p)^n - \frac{r}{p}}_{\text{Lämpel}}$$

Tilgung eines Darlehens

- Abi-Aufgabe von 2000 (LK)
- *Ein zu Jahresbeginn gewährtes Bankdarlehen S_0 = 200000 Euro wird in festen Jahresbeträgen von 10000 Euro zurückbezahlt. Dieser Jahresbetrag ist am Ende eines jeden Jahres fällig und enthält den Zins und die Tilgung. Der Zinssatz beträgt 4% von der das Jahr über vorhandenen Restschuld S_n.*
  Bestimme die Tilgungszeit.

Vom Sparen zum Tilgen

- Sparen mit Zins und konstanter Sparrate:

$$K_{n+1} = K_n + K_n \cdot p + r$$

$$K_n = \left(K_0 + \frac{r}{p}\right)(1+p)^n - \frac{r}{p}$$

- Tilgen:

$S_n = Schuldenstand\ nach\ n\ Jahren$

$$S_{n+1} = S_n + S_n \cdot p - r\,, \quad r = Rückzahlrate$$

$$S_n = \left(S_0 - \frac{r}{p}\right)(1+p)^n + \frac{r}{p}$$

Struktur der Tilgungsformel

$$S_n = \left(S_0 - \frac{r}{p}\right)(1 + p)^n + \frac{r}{p}$$

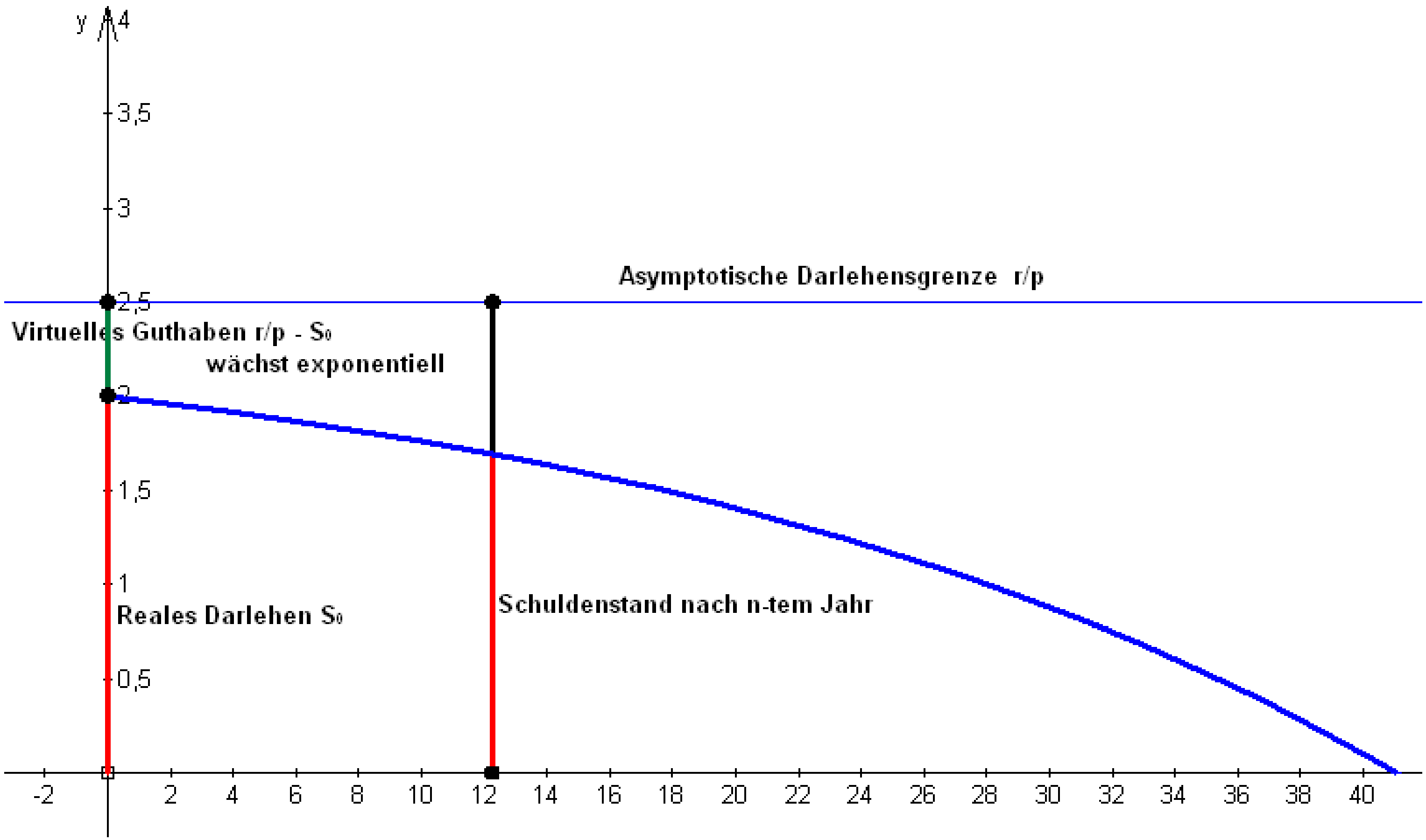
$$S(n) = c \cdot a^n + d$$

Tilgungszeit

$$٠ = -(\frac{r}{p} - S_٠)(١ + p)^N + \frac{r}{p}$$

$$(\frac{r}{p} - S_٠)(١ + p)^N = \frac{r}{p}$$

Die Tilgungszeit N ist die Zeit, in der das virtuelle Anfangskapital $\frac{r}{p} - s_٠$ auf den Wert $\frac{r}{p}$ anwächst.


y
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
-2
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38
40
Asymptotische Darlehensgrenze r/p
Virtuelles Guthaben r/p - S0
wächst exponentiell
Reales Darlehen S0
Schuldenstand nach n-tem Jahr

Diskrete und kontinuierliche Modellierung

- Exponentielles Wachstum eines Bestands:
  - rekursiv-diskret: $B(t+1) = B(t) + pB(t)$
  - $B(t+1) - B(t) = pB(t)$
  - ***Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist proportional zum aktuellen Bestand B(t)!***

Diskrete Änderungsrate

Es sei f eine exponentielle Funktion mit $f(x) = ca^x$:

Diskrete Änderungsrate:

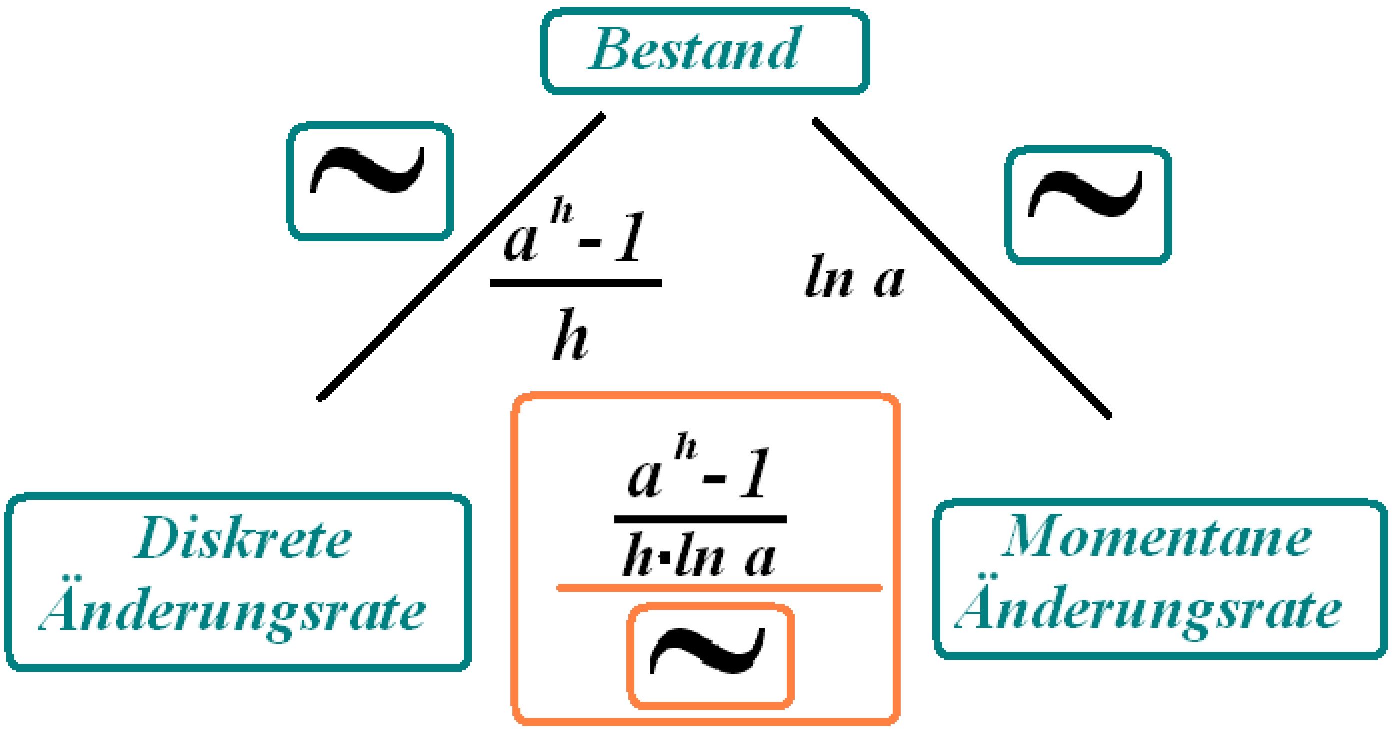
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{ca^{x+h}-ca^{x}}{h} = \frac{a^{h}-1}{h}\cdot f(x)$$

Die diskrete Änderungsrate ist prop. zum Bestand f(x)

Momentane Änderungsrate

- kontinuierlich: $f(x) = ca^x$
- $f'(x) = \ln(a) \cdot f(x)$
  - Die momentane Änderungsrate ist proportional zum aktuellen Bestand!

Das Proportionalitätsdreieck



Schrittstabile Funktionen

- Beim exponentiellen Wachstum ist die diskrete Änderungsrate proportional zur momentanen Änderungsrate, d.h. der Quotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f'(x)\cdot h}$$

- hängt nicht von x ab.

- Differenzierbare Funktionen f, bei denen dies der Fall ist, heißen ***schrittstabil***.

Welche Funktionen sind schrittstabil ?

Satz (Bürker 2007, in [Lorenz]):

Schrittstabile Funktionen sind

1. die linearen Funktionen

$$x \;\to\; mx + b$$

2. die additiv erweiterten Exponentialfunktionen der Form

$$x \;\to\; ca^x + d$$

- ***Vielen Dank!!***