

# Vernetzende Überlegungen zu „Regression – Rekursion – Funktion“

*Vortrag bei der Lehrerfortbildung  
anlässlich der Tagung des  
AK Vernetzungen im Mathematikunterricht  
Darmstadt, 3. Mai 2013*

*buerker@online.de*

# Gliederung

- Regression: Beispiele zur Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate
- Rekursion: Beispiele zum exponentiellen und beschränkten Wachstum
- Lineare Rekursionsgleichung und explizite Funktionsdarstellung
- Sparen und Tilgen
- Schrittstabile Funktionen

# Literatur

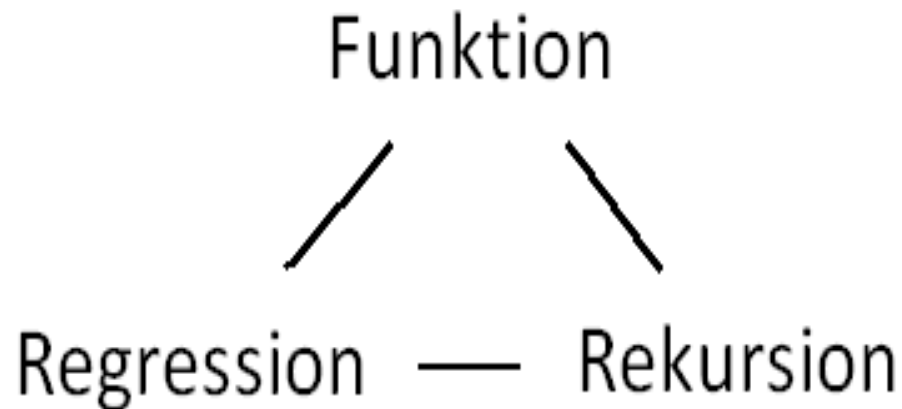
Beiträge im Vernetzungsband 3:

*Bestimmung einer Ausgleichsgeraden nach dem Gauß'schen Minimumprinzip*

*Modellierung von Spar- und Tilgungsvorgängen*

# Das Begriffsdreieck Regression – Rekursion – Funktion

- Meraner Konferenz von 1905:
- **Zentrale Rolle des *Funktionsbegriffs* im MU**
- Bildungsstandards 2003:  
***Funktionales Denken* als *Leitidee* des MU**



# Regression: Von Daten zur Funktion

- Historisches Beispiel:
- ***Die Entdeckung des Kleinplaneten Ceres***

# Beispiel für eine lineare Regression

- Aufgabe:
- Gegeben seien die Punkte (Daten einer Messreihe)
- $P_1(0|2)$ ,  $P_2(2|3)$ ,  $P_3(4|5)$ ,  $P_4(6|6)$ .
- Bestimme die **Ausgleichsgerade**.

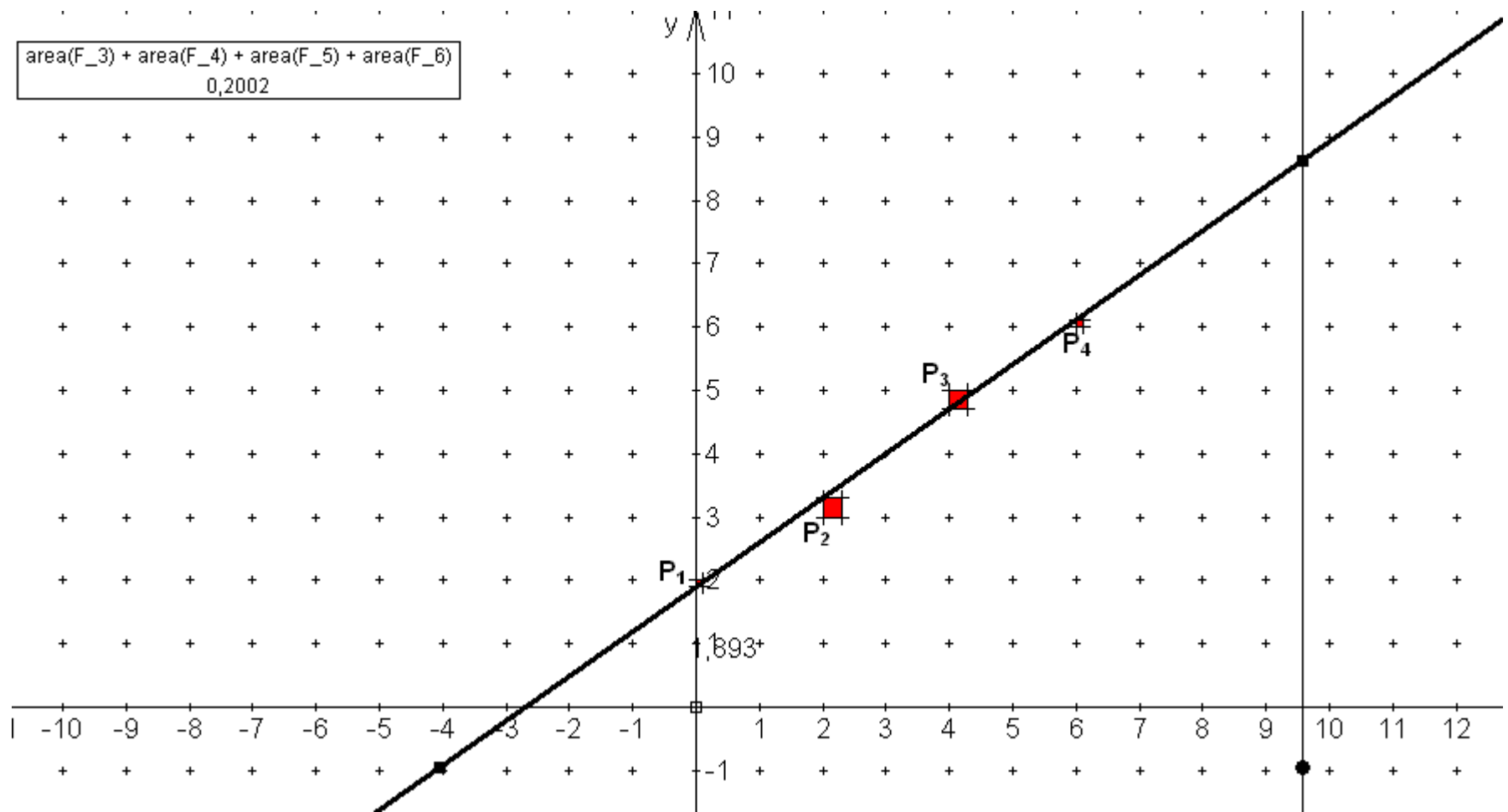
# Spielerisches Ermitteln der Ausgleichsgerade

$$T(m, c) = (m \cdot 0 + c - 2)^2 + (2m + c - 3)^2 \\ + (4m + c - 5)^2 + (6m + c - 6)^2.$$

Zwei Variable!

Bedingung zwischen ***m*** und ***c*** notwendig!

# Veranschaulichung der Ausgleichsgeraden in Dynageo





# Schwerpunkt einer Punktwolke

Der Schwerpunkt einer Punktwolke wie z. B.

$P_1(x_1|y_1), \dots, P_n(x_n|y_n)$  ist  $S(x_s | y_s)$  mit

$$x_s = 1/n \cdot (x_1 + \dots + x_n)$$

$$y_s = 1/n \cdot (y_1 + \dots + y_n)$$

Bei den gegebenen 4 Datenpunkten ist

**S(3|4)** der Schwerpunkt der Punktwolke.

# Bedingung

- ***Der Schwerpunkt der Punktwolke liegt auf der Ausgleichsgeraden!***

# Punktprobe mit dem Schwerpunkt

- Schwerpunkt  $S(3|4)$
- Punktprobe:  $4 = 3m + c$  oder  $c = 4 - 3m$

# Zu minimierender Term

$$T(m, c) = (m \cdot 0 + c - 2)^2 + (2m + c - 3)^2 \\ + (4m + c - 5)^2 + (6m + c - 6)^2$$

$$T(m) = (m \cdot 0 + [4 - 3m] - 2)^2 \\ + (2m + [4 - 3m] - 3)^2 \\ + (4m + [4 - 3m] - 5)^2 \\ + (6m + [4 - 3m] - 6)^2$$

# Vereinfachter Term

$$\begin{aligned}T(m) &= 2(3m - 2)^2 + 2(m - 1)^2 \\ &= 20m^2 - 28m + 10\end{aligned}$$

Minimum des Terms für  $m = 0,7$

Daraus:  $c = 1,9$

**Ausgleichsgerade:  $y = 0,7x + 1,9$**

# Rekursion allgemein

- Umfangreiche Literatur
- Neuere Buch, schulmathematisch ausgerichtet:
  - ***Gernot Lorenz:***
  - ***Funktionale Modellierung und Rekursion***

# Temperaturerhöhung

- Beispiel: Aus einem Kühlschrank wird ein Glas Wasser von  $4^{\circ}\text{C}$  herausgenommen und der Umgebungstemperatur von  $20^{\circ}\text{C}$  ausgesetzt. Der Temperaturzuwachs pro Zeiteinheit ist proportional zum Sättigungsmanko (= *Differenz zwischen Umgebungstemperatur und aktueller Temperatur (Newtonsches Temperaturgesetz)*).
- Beschreibe den Temperaturverlauf

# Daten

- Datenpunkte: (0|4), (1|12), (2|16), (3|18).
- Sättigungsmanko: 16 8 4 2
- $p = 50\%$
- Temp.-zunahme: 8 4 2

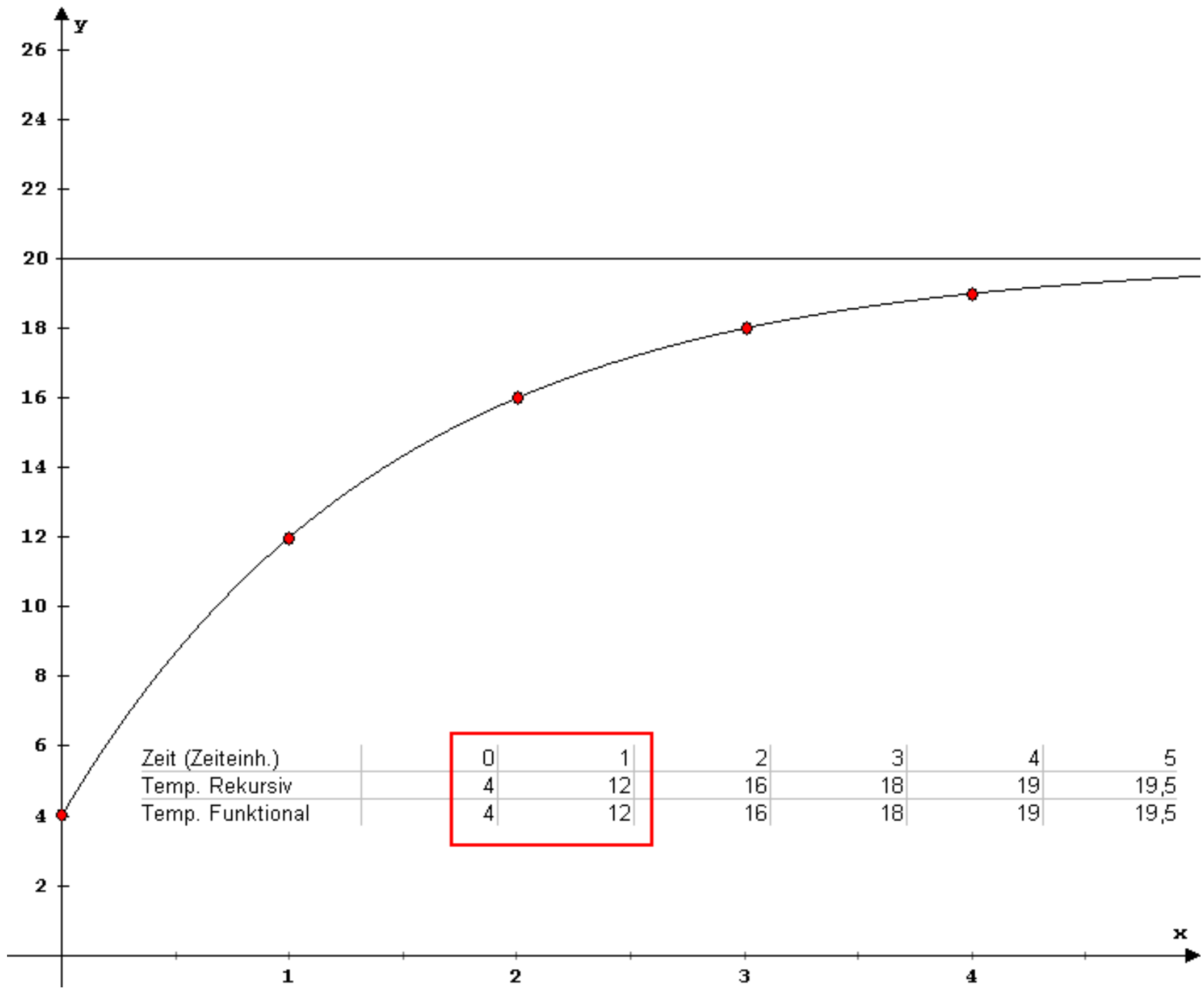


# Rekursive Darstellung

- Rekursiv:  $M(n+1) = 0,5 \cdot M(n)$  oder
- $T(n+1) = 20 - M(n+1)$
- $= 20 - 0,5 \cdot M(n)$
- $= 20 - 0,5 \cdot (20 - T(n))$
- $= 10 + 0,5 \cdot T(n)$
- lineare Rekursionsgleichung !

# Explizite Darstellung

- Explizite Darstellung:
- Für die Werte des Sättigungsmankos gilt
- $M(n) = 16 \cdot 0,5^n$
  
- Für die Temperaturwerte gilt dann:
- $T(n) = 20 - 16 \cdot 0,5^n$



# Vergleich rekursiv - explizit

- Rekursiv:  $T(n+1) = 10 + 0,5 \cdot T(n)$
- Explizit:  $T(n) = 20 - 16 \cdot 0,5^n$

Hat eine Folge  $(a_n)$  mit linearer Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = qa_n + r$$

stets eine explizite Darstellung der Form

$$n \rightarrow cq^n + d \quad ?$$

# Die Kapitalformel

Bekannt:

Ein Anfangskapital  $K_0$  erhöht sich nach  $n$  Jahren durch Zinseszins mit Zinssatz  $p$  auf das Endkapital

$$K_n = K_0(1 + p)^n$$

# Ein erweiterter Sparvorgang

- Ein Kapital  $K_0$  erhöht sich beim Zinssatz  $p$
- a) durch Zins und Zinseszins und
- b) durch eine jährlich konstante Sparrate  $r$
  
- Bestimme den Kapitalendwert nach  $n$  Jahren.

# Rekursion

$K_n$  = Kapital nach n Jahren

$K_{n+1}$  = Kapital nach n+1 Jahren

$$K_{n+1} = K_n + K_n p + r$$

*Wie erhält man daraus eine explizite Darstellung?*

# Von der rekursiven zur expliziten Darstellung

$$K_{n+1} = K_n + K_n p + r$$

$$K_{n+1} = K_n + p(K_n + r/p)$$

$$K_{n+1} + r/p = K_n + r/p + p(K_n + r/p)$$



$$K_{n+1} + r/p = K_n + r/p + p(K_n + r/p)$$

$$K_{n+1} + r/p = (K_n + r/p)(1 + p)$$

Somit:  $n \rightarrow K_n + r/p$  ist eine exponentielle Folge

$$K_n + r/p = (K_0 + r/p)(1 + p)^n$$

$$K_n = (K_0 + r/p)(1 + p)^n - r/p \quad (\text{expliz. Darst.!!})$$

$$= c \cdot a^n + d$$

# Die Vermutung ist richtig!

Liegt einer rekursiv definierten Folge  $(a_n)$  eine lineare Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = (1+p)a_n + r, \quad p \neq 0, p > -1$$

zu Grunde, so hat diese eine explizite Darstellung der Form

$$a_n = c(1+p)^n + d$$

# Vergleich mit der finanzmathematischen Sparformel

$$K_{n+1} = K_n + K_n p + r = K_n q + r \quad (q = 1+p)$$

$$K_n = K \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_n = K \cdot (1+p)^n + \frac{r}{p} \cdot (1+p)^n - \frac{r}{p}$$

$$K_n = \left(K + \frac{r}{p}\right) \cdot (1+p)^n - \frac{r}{p}$$

# Vergleich der Formeln

- Kapitalratenformel (Lämpel-Formel):

$$K_n = \left(K_0 + \frac{r}{p}\right) (1 + p)^n - \frac{r}{p}$$

- Einfache Kapitalformel ( $r = 0$ , Max-Formel):

$$K_n = K_0 (1 + p)^n$$

- Einfache Sparformel ( $K_0 = 0$ , Moritz-Formel):

$$K_n = \frac{r}{p} (1 + p)^n - \frac{r}{p}$$

# Näherungsformel für Verdopplungszeit

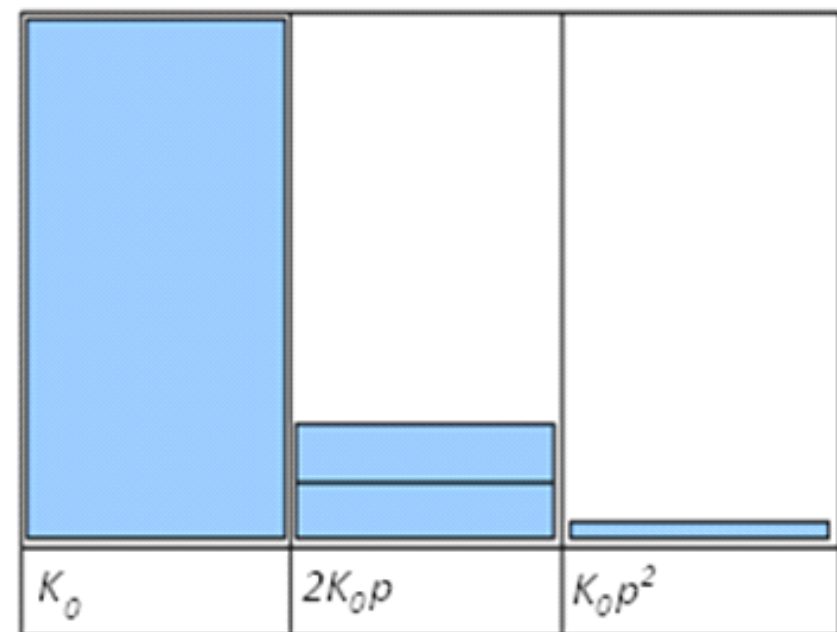
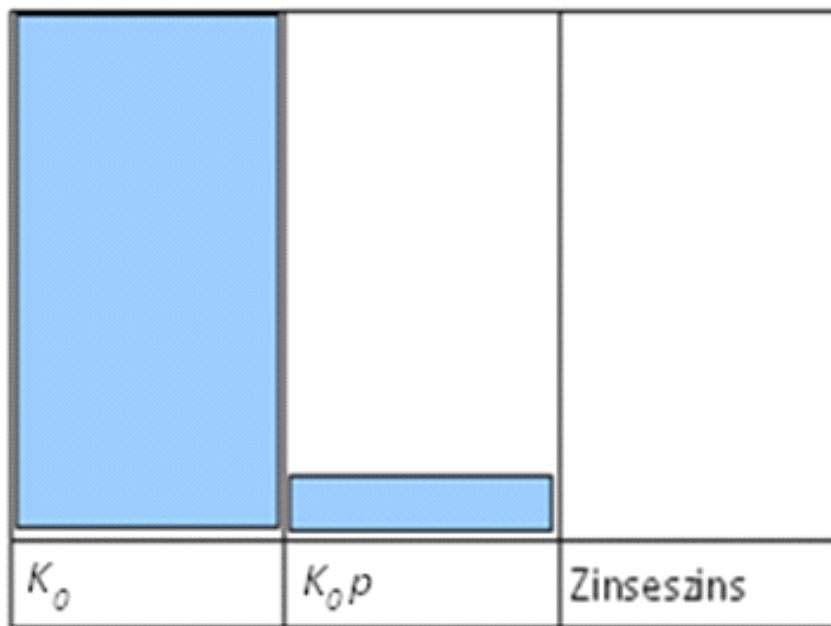
- $(1+p)^n = 2$ :
- $n = \ln 2 / \ln(1+p)$
- Für kleine  $p$  gilt:  $\ln(1+p) \approx p$
- Somit:  $n \approx 0,7 / p = 70 / \text{Zinsfuß}$

# Zahlenbeispiel

- Jemand spart am Ende eines jeden Jahres den Betrag von 400 Euro auf ein Sparkonto zum Zinssatz 4% an.
  - Nach welcher Zeit erreicht das Guthaben 10 000 € ?
  - $r = 400$ ,  $p = 4\%$ ,  $r/p = 400 / 0,04 = 10\ 000$ .
- $10\ 000 \cdot 1,04^n - 10\ 000 = 10\ 000$
- $10000 \cdot 1,04^n = 20\ 000$
- $70/4 \approx 17,5$
- Es dauert 17,5 Jahre, bis 10 000 Euro erreicht sind.

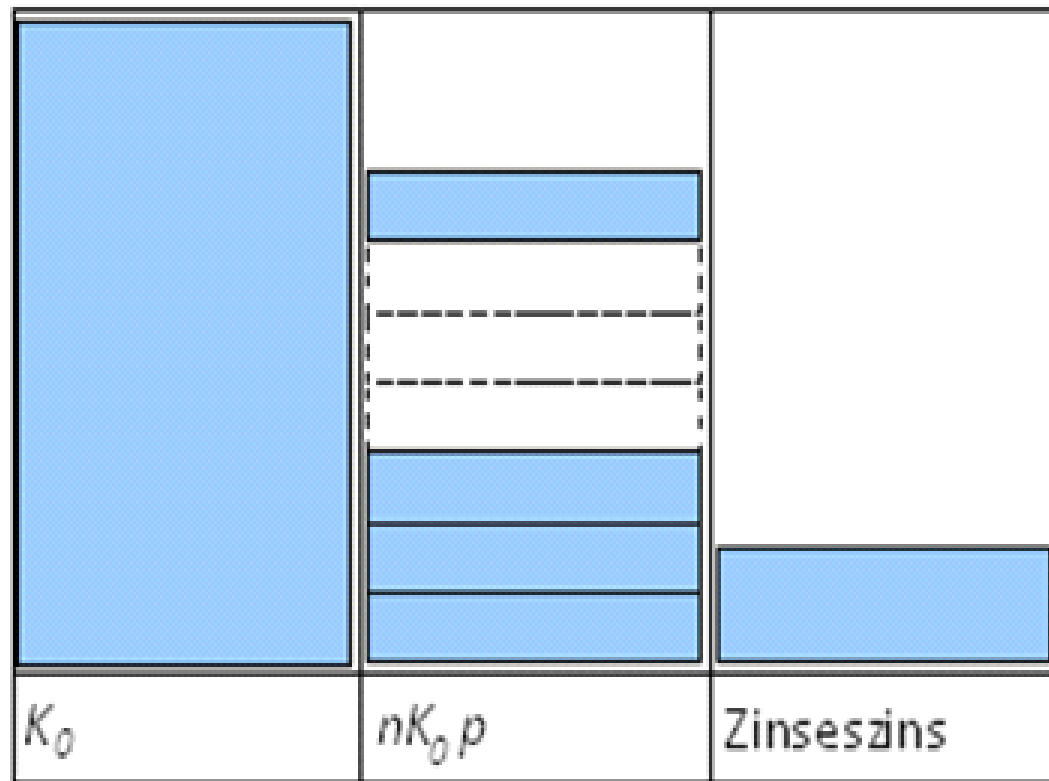
# Neue Sichtweise der Kapitalformel

- 3-Säulen-Modell:



- Kapital nach n Jahren:

$$K_0 \cdot (1 + p)^n$$



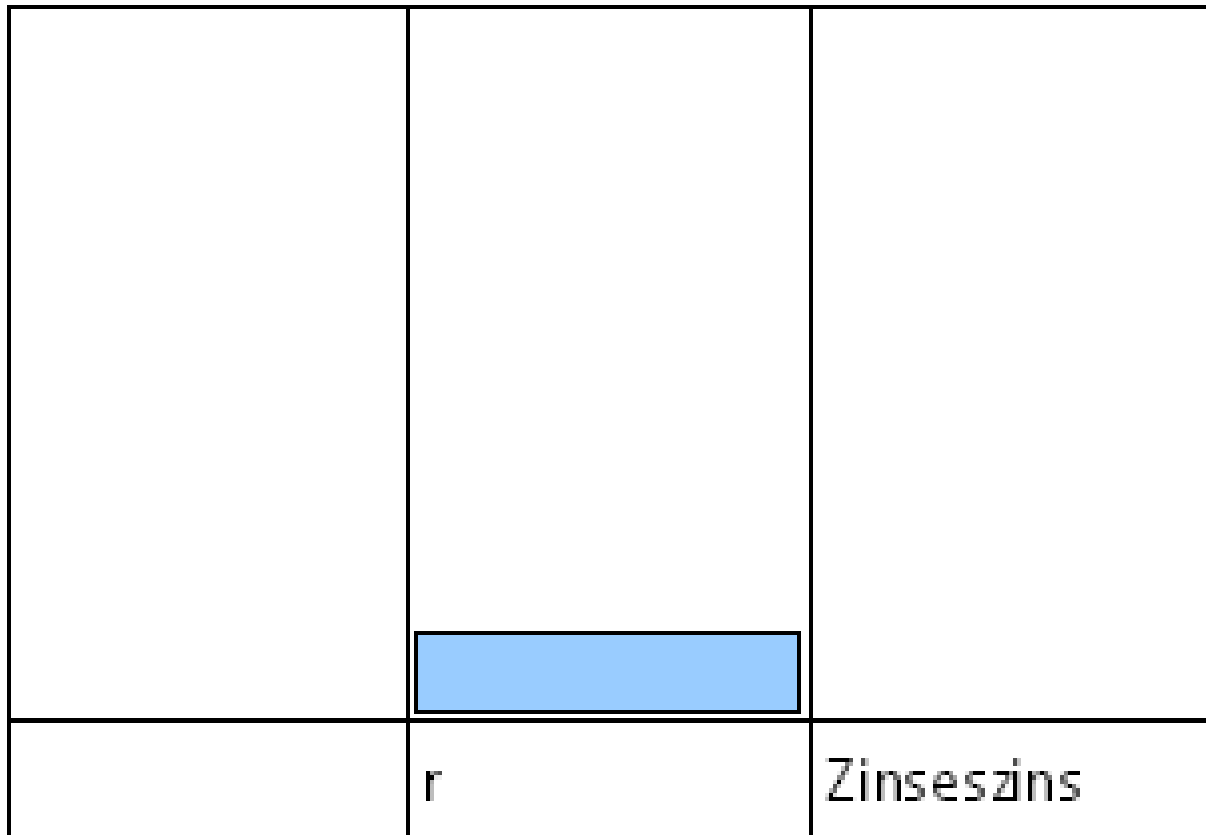
- Kapital in 2. und 3. Säule:

$$K_0 \cdot (1 + p)^n - K_0$$

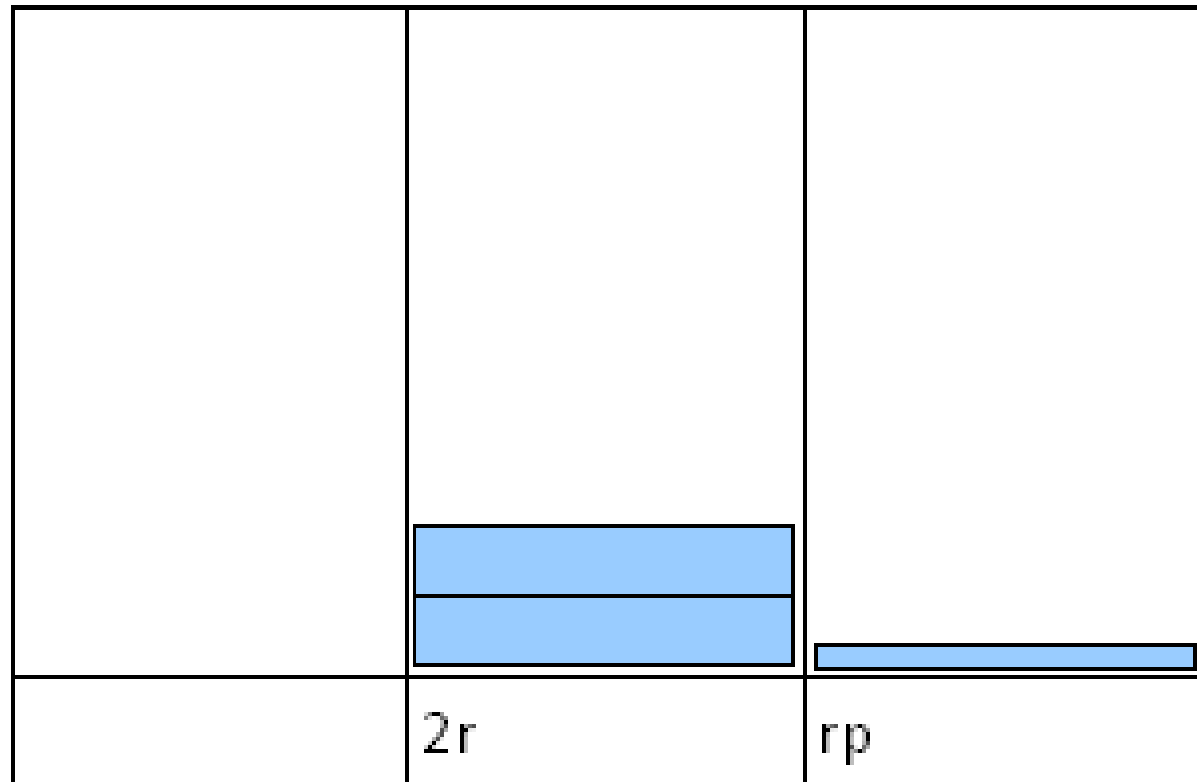


# Entwicklung der Moritz-Formel

- Zum Ende des ersten Jahres:  $n = 1$

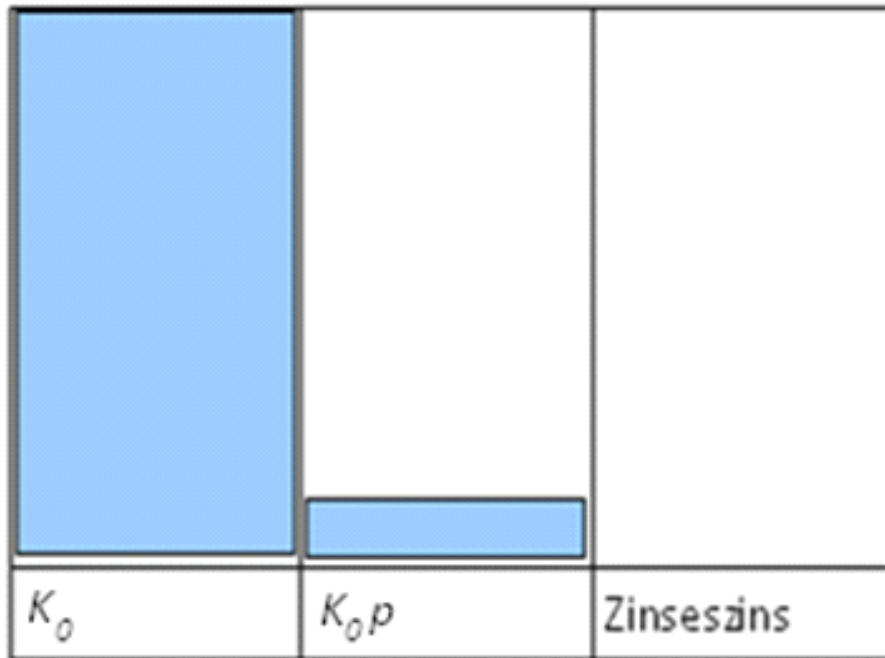


Zum Ende des zweiten Jahres:  $n = 2$

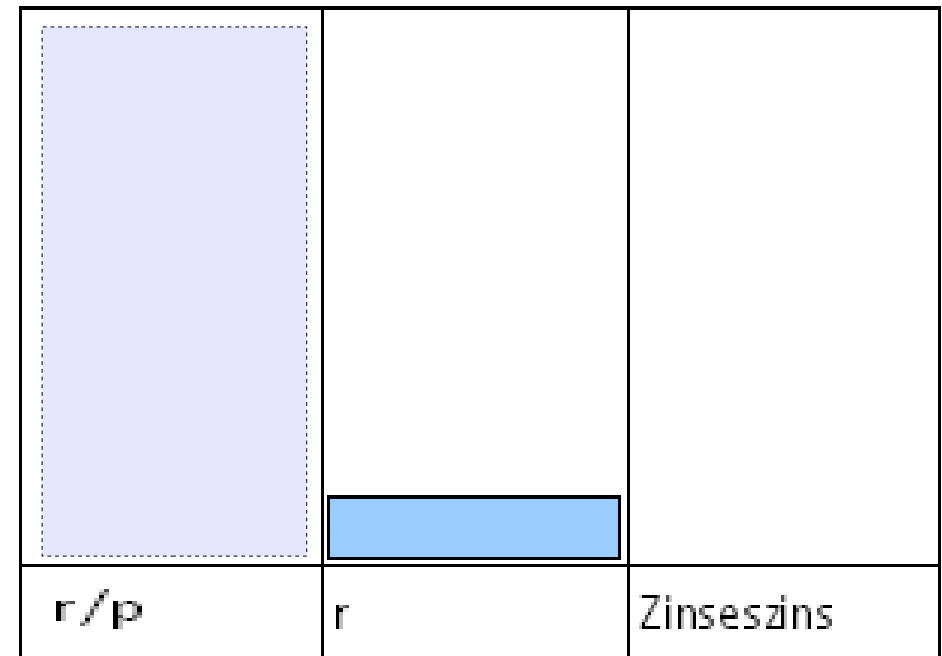


# Vergleich Max – Moritz

- Max



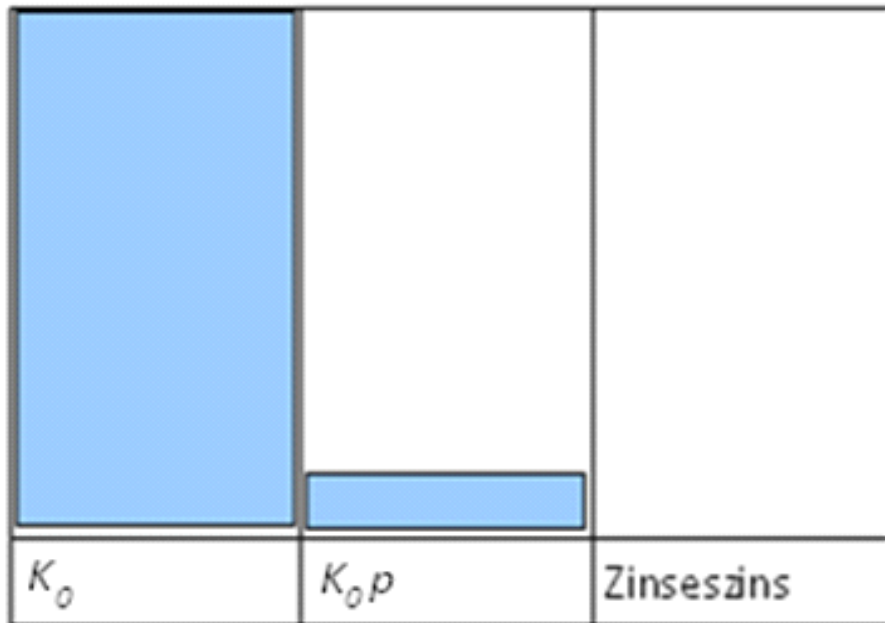
- Moritz



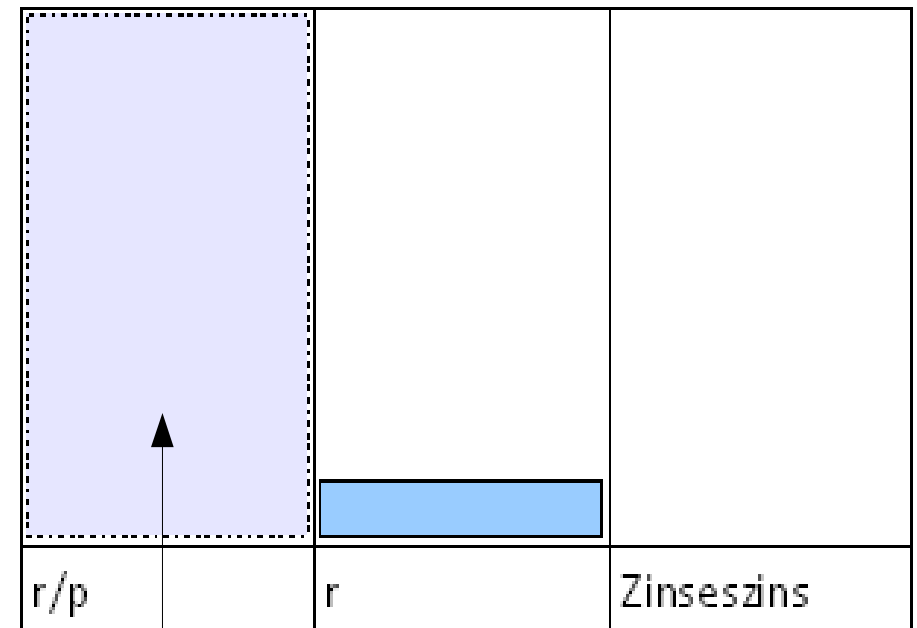
Gedachtes Anfangsguthaben  
so, dass  $K_0 p = r$

# Vergleich Max – Moritz

- Max

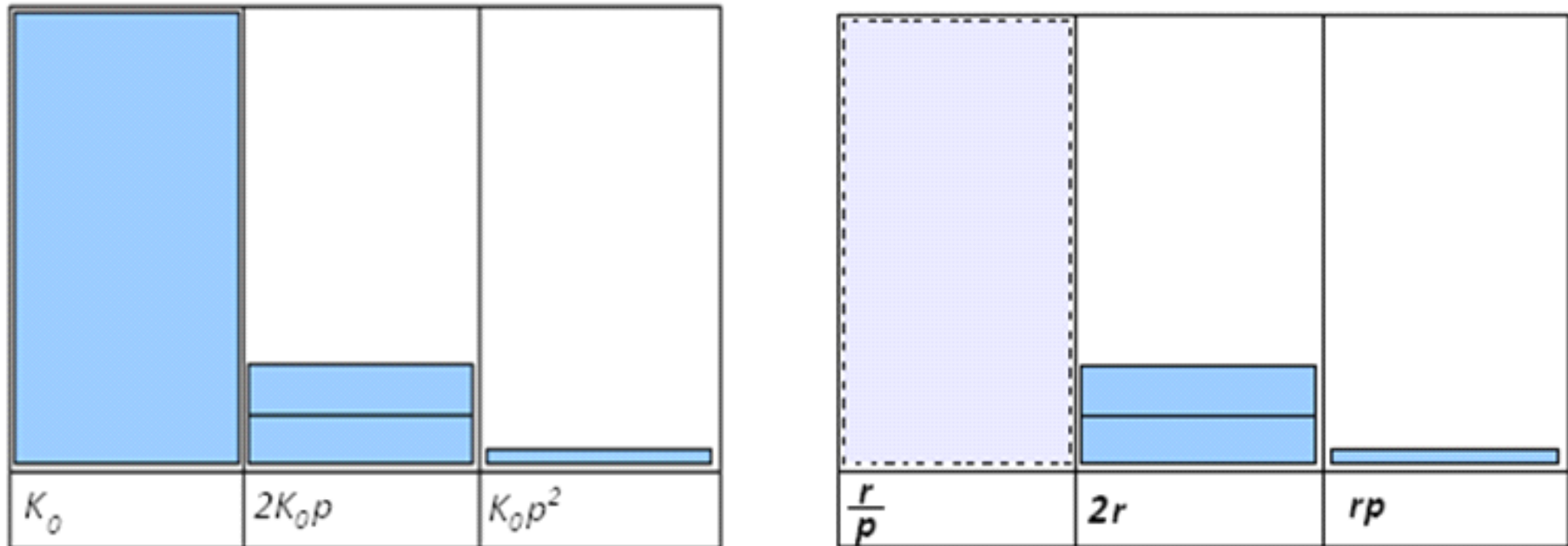


## Moritz

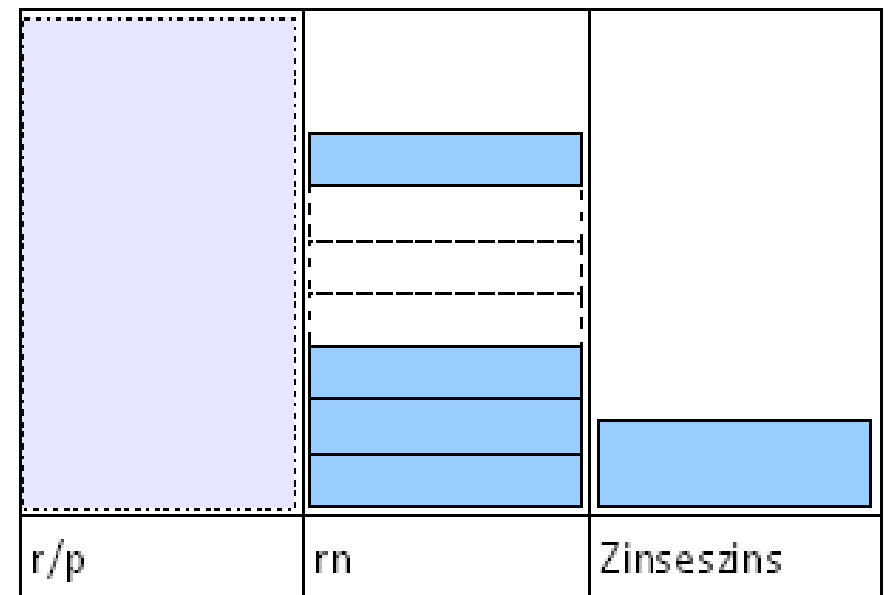
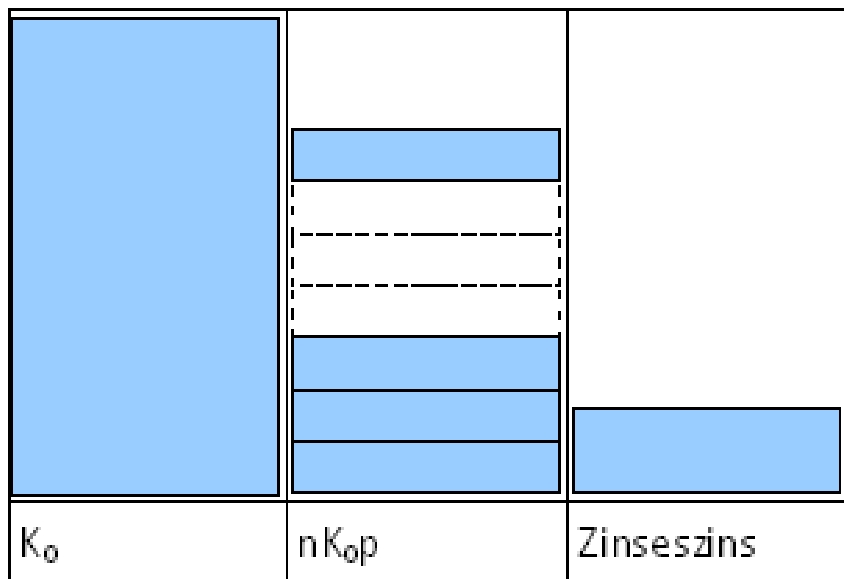


Gedachtes Anfangsguthaben  
so, dass  $K_g p = r$

# Herleitung der Moritz-Formel mit dem 3-Säulen-Modell



# Moritz-Formel



Angespartes Kapital nach n Jahren:  $\frac{r}{p} (1 + p)^n - \frac{r}{p}$

# Max + Moritz = Lämpel

$$K_n = \underbrace{K_0 \cdot (1 + p)^n}_{\text{Max}} + \underbrace{\frac{r}{p} \cdot (1 + p)^n - \frac{r}{p}}_{\text{Moritz}}$$

$$K_n = \underbrace{\left(K_0 + \frac{r}{p}\right) \cdot (1 + p)^n - \frac{r}{p}}_{\text{Lämpel}}$$

# Tilgung eines Darlehens

- Abi-Aufgabe von 2000 (LK)
- *Ein zu Jahresbeginn gewährtes Bankdarlehen  $S_0 = 200000$  Euro wird in festen Jahresbeträgen von 10000 Euro zurückbezahlt. Dieser Jahresbetrag ist am Ende eines jeden Jahres fällig und enthält den Zins und die Tilgung. Der Zinssatz beträgt 4% von der das Jahr über vorhandenen Restschuld  $S_n$ . Bestimme die Tilgungszeit.*



# Vom Sparen zum Tilgen

- Sparen mit Zins und konstanter Sparrate:

$$K_{n+1} = K_n + K_n \cdot p + r$$

$$K_n = \left(K_0 + \frac{r}{p}\right)(1+p)^n - \frac{r}{p}$$

- Tilgen:

$S_n$  = *Schuldenstand nach n Jahren*

$$S_{n+1} = S_n + S_n \cdot p - r, \quad r = \text{Rückzahlrate}$$

$$S_n = \left(S_0 - \frac{r}{p}\right)(1+p)^n + \frac{r}{p}$$

# Struktur der Tilgungsformel

$$S_n = \left(S_0 - \frac{r}{p}\right) (1 + p)^n + \frac{r}{p}$$

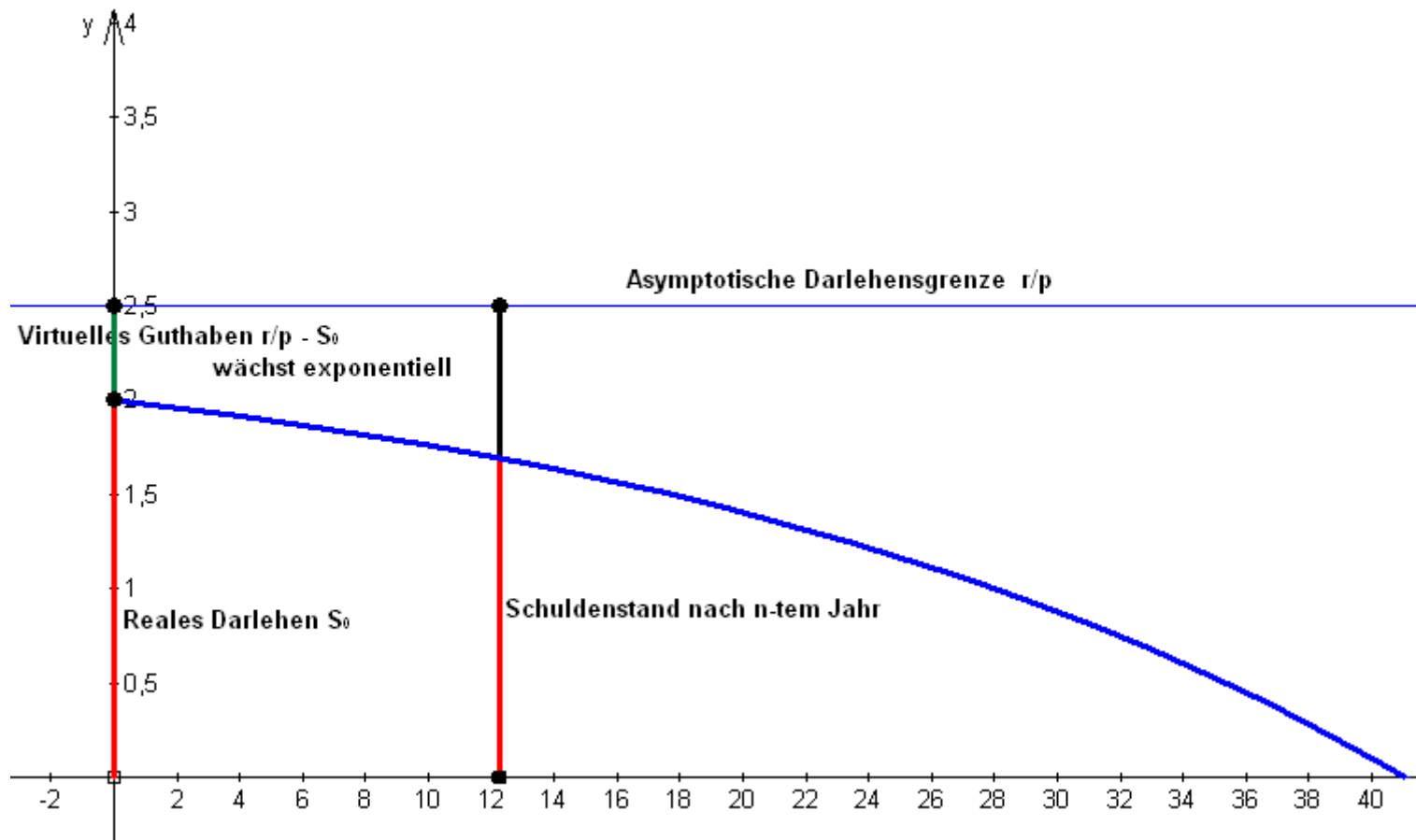
$$S(n) = c \cdot a^n + d$$

# Tilgungszeit

$$\cdot = -\left(\frac{r}{p} - S.\right)(1 + p)^N + \frac{r}{p}$$

$$\left(\frac{r}{p} - S.\right)(1 + p)^N = \frac{r}{p}$$

Die Tilgungszeit  $N$  ist die Zeit, in der das virtuelle Anfangskapital  $\frac{r}{p} - S.$  auf den Wert  $\frac{r}{p}$  anwächst.



# Diskrete und kontinuierliche Modellierung

- Exponentielles Wachstum eines Bestands:
  - rekursiv-diskret:  $B(t+1) = B(t) + pB(t)$
  - $B(t+1) - B(t) = pB(t)$
  - ***Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist proportional zum aktuellen Bestand  $B(t)$ !***

# Diskrete Änderungsrate

Es sei  $f$  eine exponentielle Funktion mit  $f(x) = ca^x$ :

***Diskrete Änderungsrate:***

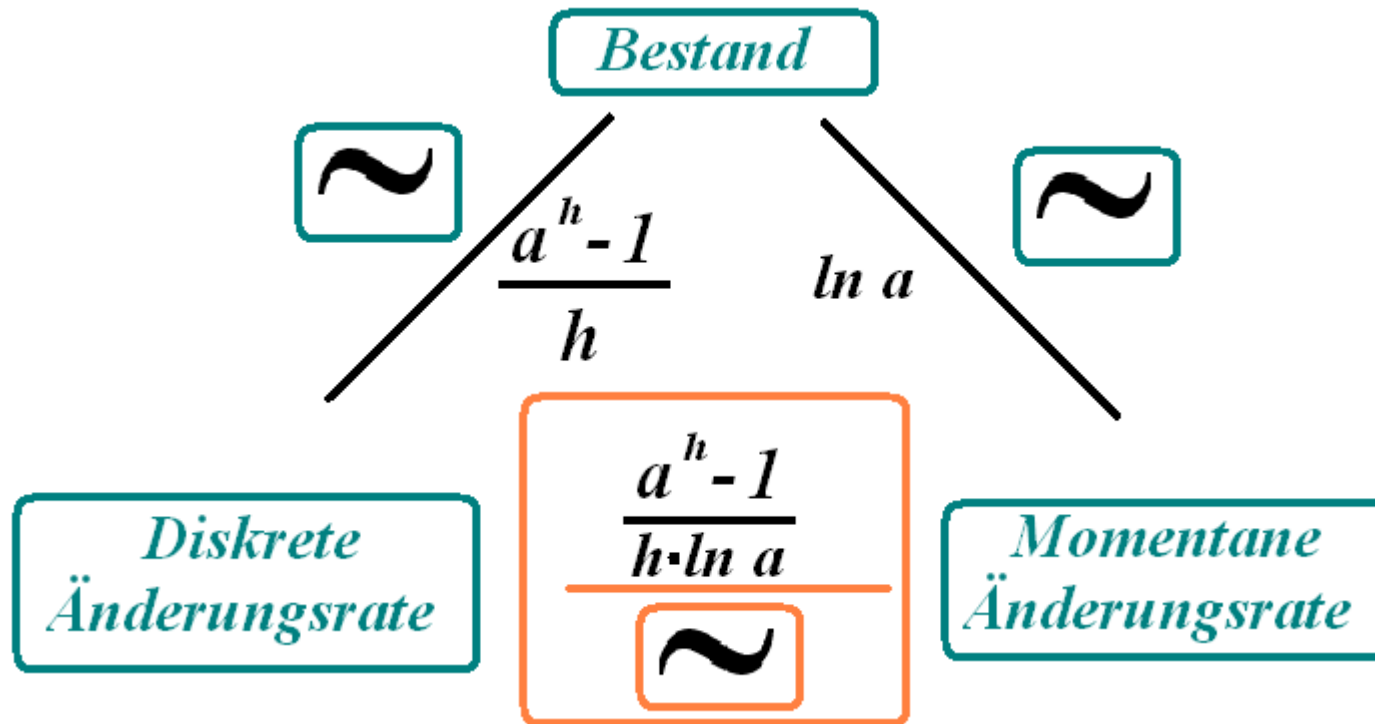
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{ca^{x+h} - ca^x}{h} = \frac{a^h - 1}{h} \cdot f(x)$$

Die diskrete Änderungsrate ist prop. zum Bestand  $f(x)$

# Momentane Änderungsrate

- kontinuierlich:  $f(x) = ca^x$
- $f'(x) = \ln(a) \cdot f(x)$
- Die momentane Änderungsrate ist proportional zum aktuellen Bestand!

# Das Proportionalitätsdreieck





# Schrittstabile Funktionen

- Beim exponentiellen Wachstum ist die diskrete Änderungsrate proportional zur momentanen Änderungsrate, d.h. der Quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f'(x) \cdot h}$$

- hängt nicht von  $x$  ab.
- Differenzierbare Funktionen  $f$ , bei denen dies der Fall ist, heißen ***schrittstabil***.

# Welche Funktionen sind schrittstabil ?

Satz (Bürker 2007, in [Lorenz]):

Schrittstabile Funktionen sind

1. die linearen Funktionen

$$x \rightarrow mx + b$$

2. die additiv erweiterten Exponentialfunktionen  
der Form

$$x \rightarrow ca^x + d$$

- ***Vielen Dank!!***