Minkowski-Geometrie in der Schule

Sehr geehrte Leserinnen und Leser diser pdf-Datei,
Sie können gerne die Dynageo-Dateien, die zu einigen Folien meines am 24. April an der Uni Passau gehaltenen Vortrags gehören, erhalten.
Schreiben Sie einfach eine Mail an buerker@online.de!

Michael Bürker

buerker@online.de

Gliederung

Weg-Zeit-Diagramme

Grundprinzipien der speziellen Relativitätstheorie

Drei Symmetrieprinzipien

Der relativistische Faktor

Lorentz-Kontraktion und Zeit-Dilatation

Das Zwillingsparadoxon

Umsetzung im Mathematikunterricht

Die abbildungsgeometrische Interpretation der Lorentztransformation

Die Eichkurve

„Von Stund‘ an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren“.

Hermann Minkowski in einem Vortrag
vor Naturforschern und Ärzten 1908

2015: Jahr des Lichts

Die Unesco hat 2015 zum

Jahr des Lichts

erklärt.

Weg-Zeit-Diagramm

Bild (Kopie) aus Lambacher-Schweizer:
Analytische Geometrie, OS,
„Mathematische Exkursion“

Vertauschung der Weg-Zeit-Achse!

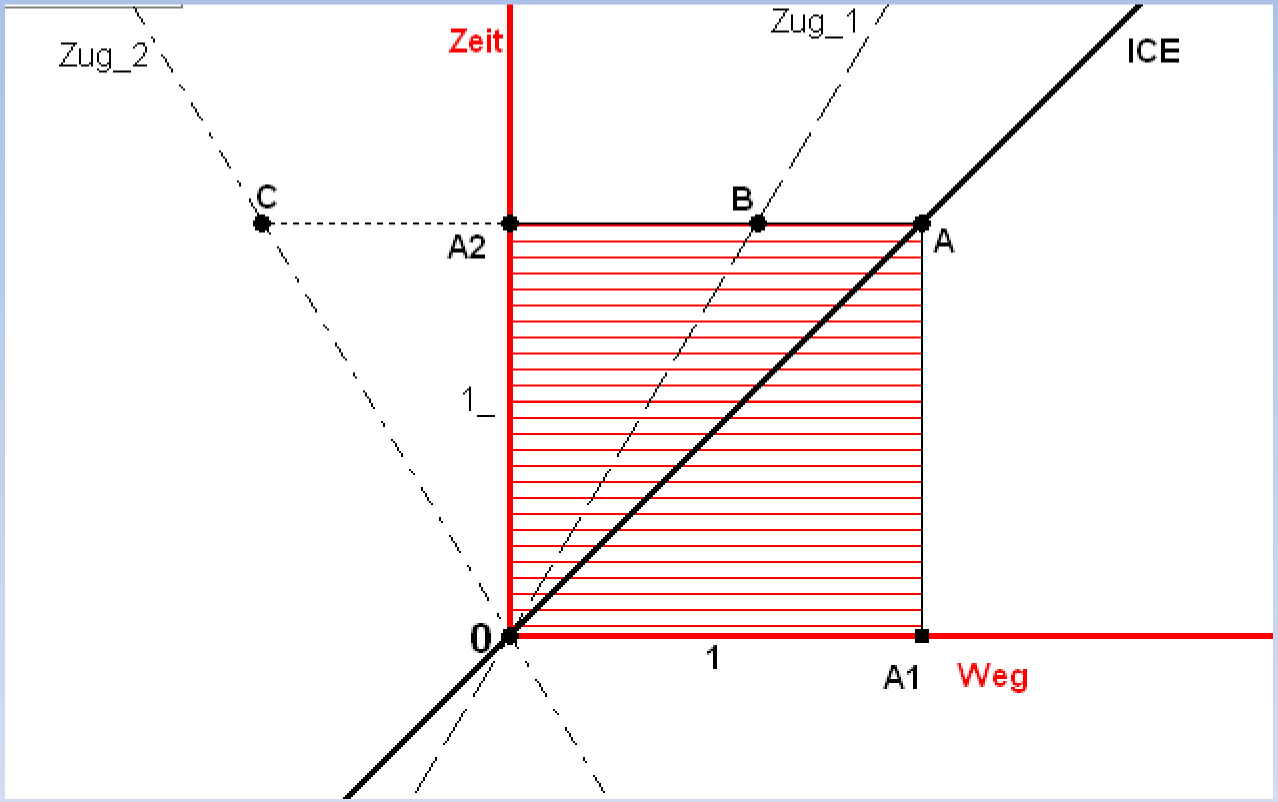
Weltlinien oder Ereignisse

Weltlinien erzählen Geschichten!

Weg-Zeit-Diagramme bei Zügen

- *Die Bewegung des schnellsten Zugs wird durch die erste Winkelhalbierende dargestellt.*

Grafischer Fahrplan



Schiefe Koordinatensysteme

Psychologisch wichtig:

- *Arbeiten mit schiefen Koordinatensystemen*

Wir werden sehen:

- *Die Schiefwinkligkeit bringt Vorteile!*

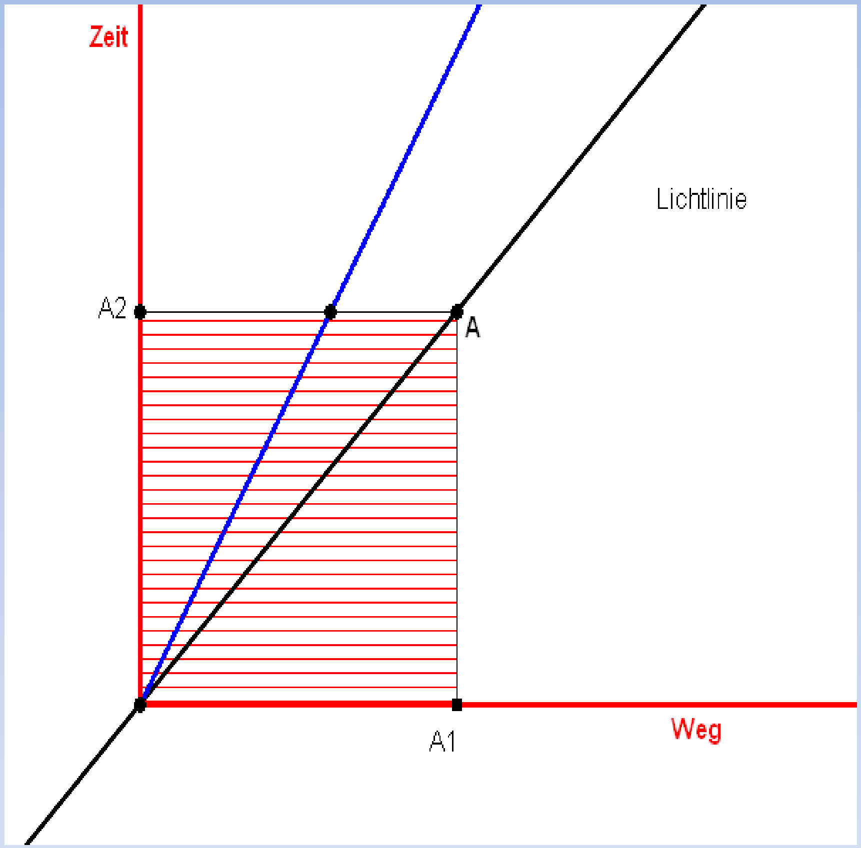
Hintergrundwissen: Physikalische Grundprinzipien

- *Die Lichtgeschwindigkeit ist **konstant**.*
- *Sind zwei Bezugssysteme gegeneinander gleichförmig bewegt, so nehmen die Naturgesetze in beiden Systemen die gleiche Form an.*

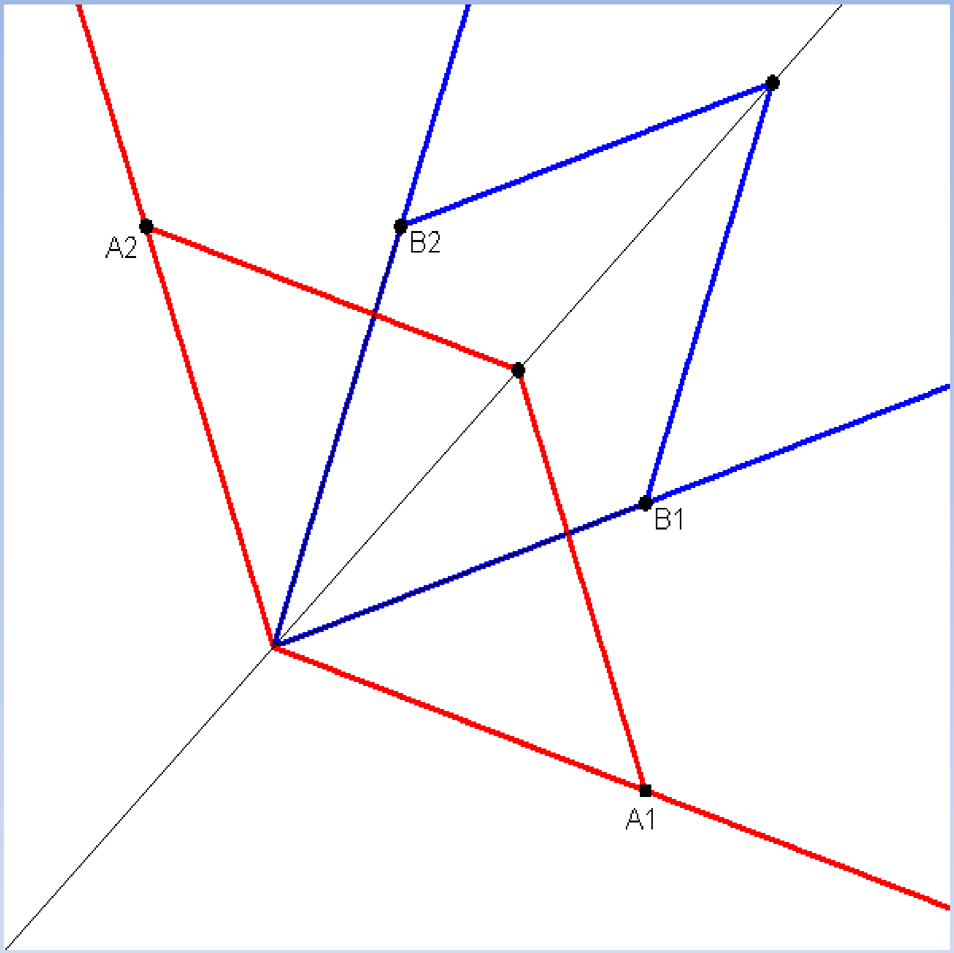
Bezugssystem des Beobachters A

- *Die Einheiten auf den Achsen werden so gewählt, dass die Bewegung des Lichts durch die **Winkelhalbierende** dargestellt wird (Lichtlinie):*
- *A1 (1 | 0)*
- *A2 (0 | 1)*

Bewegung = Weltlinie



Beobachter B (blau) bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit v (= 0,6c)



Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verlangt, dass im A- und im B-System die Weg- und die Zeitachse symmetrisch zur Lichtlinie liegen.

Gleichwertigkeit der beiden Bezugssysteme:

- *Jeder der beiden Beobachter darf sich als in Ruhe befindlich ansehen (und den jeweils Anderen als bewegt).*

Daraus: Mathematische Prinzipien

Weg- und Zeitachse *sind in jedem der beiden Bezugssysteme A und B* ***achsensymmetrisch*** *bezüglich der ersten Winkelhalbierenden.*

Zusätzlich ein didaktisches Prinzip:

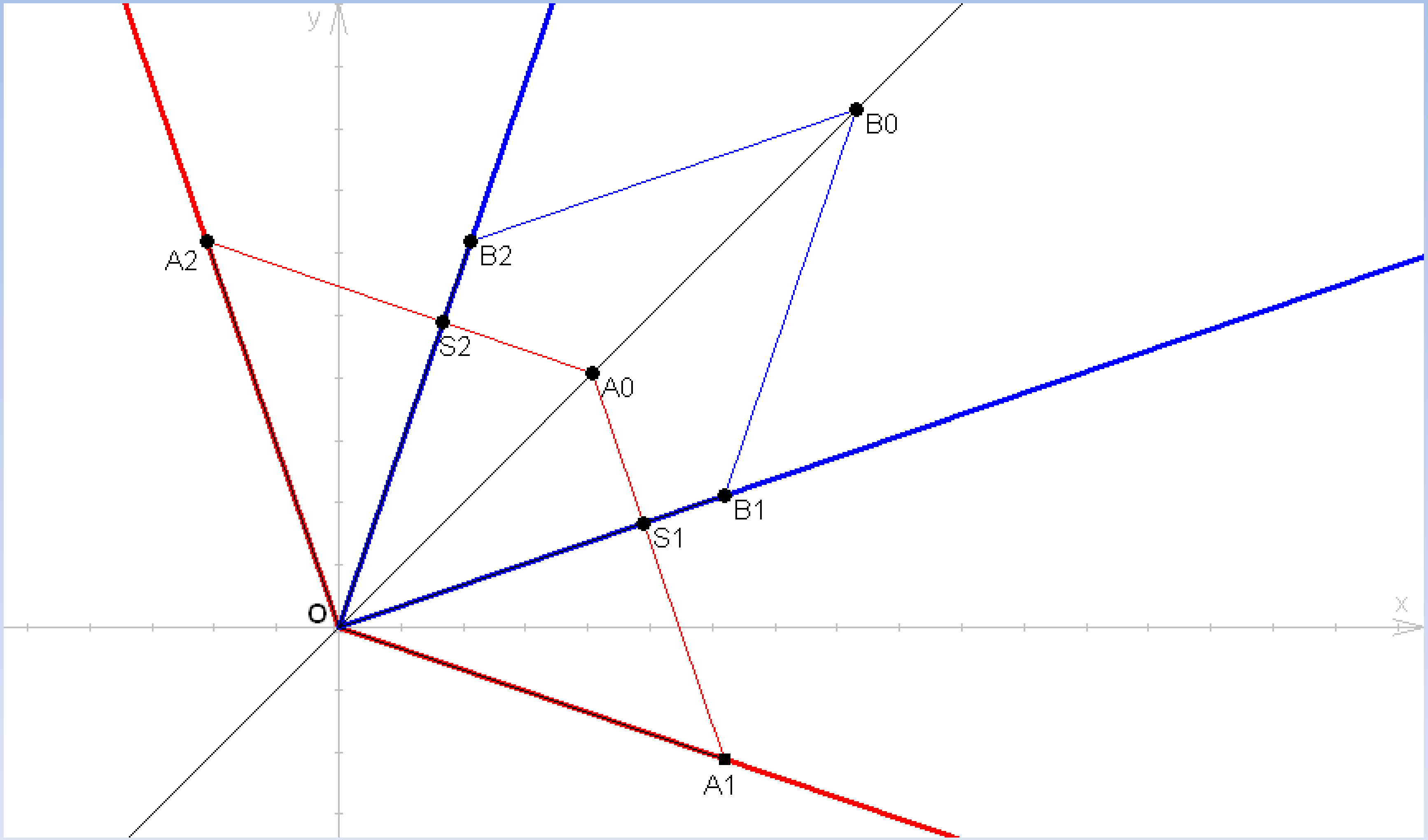
Die beiden ***Wegachsen bzw. Zeitachsen sollen eine weitere Symmetriebedingung erfüllen.***

Drei Symmetriebedingungen

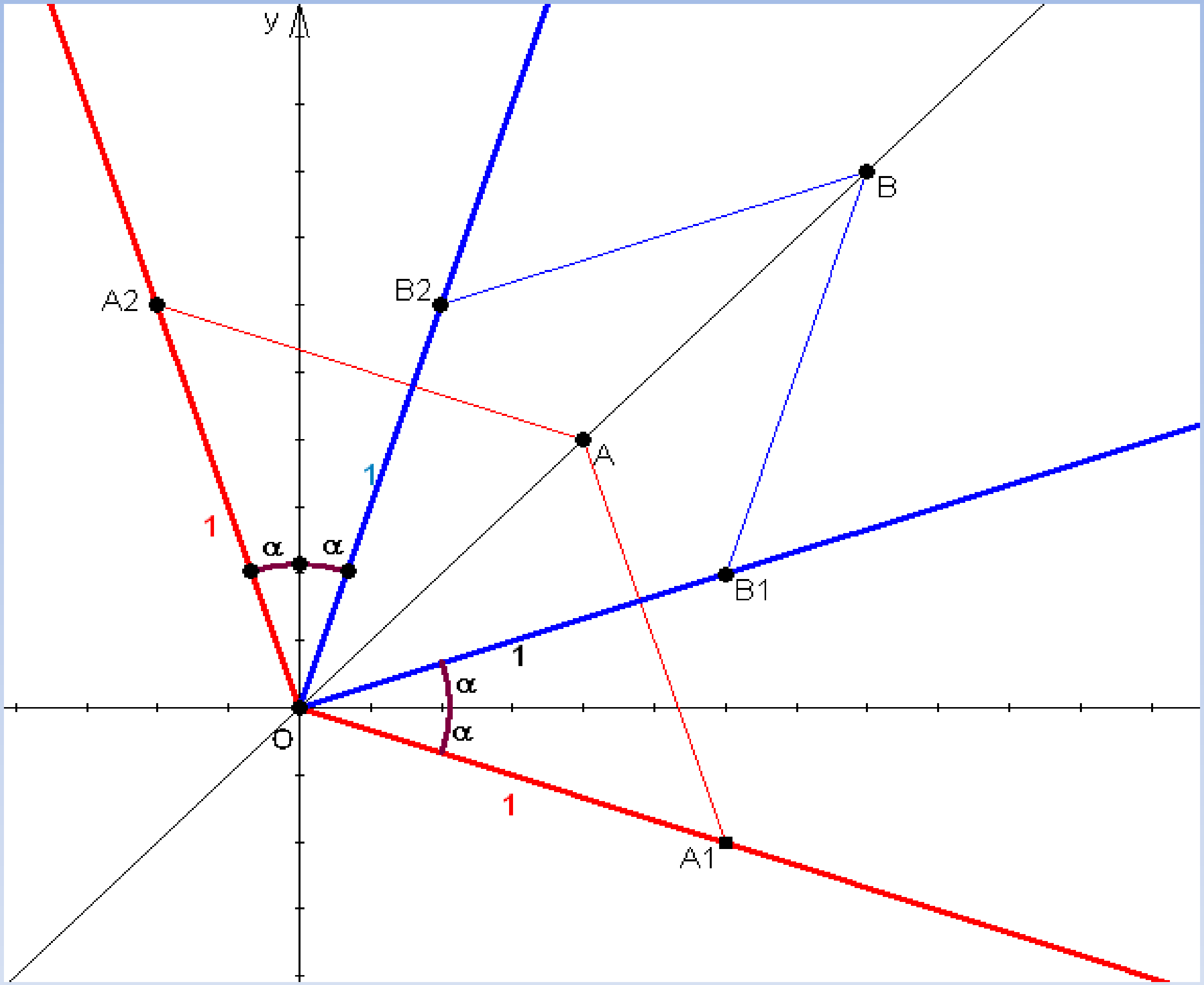
- *Die Achsen des A- und des B-Systems lassen sich zusammen mit einem kartesischen x-y-Koordinatensystem K_0 so wählen, dass*
  - *Weg- und Zeitachse jedes Systems symmetrisch zur ersten Winkelhabierenden von K_0,*
  - *die beiden Wegachsen symmetrisch bezüglich der x-Achse des kartesischen Koordinatensystems*
  - *die beiden Zeitachsen symmetrisch bezüglich der y-Achse des kartesischen Koordinatensystems*

sind.

Kartesisches Koordinatensystem

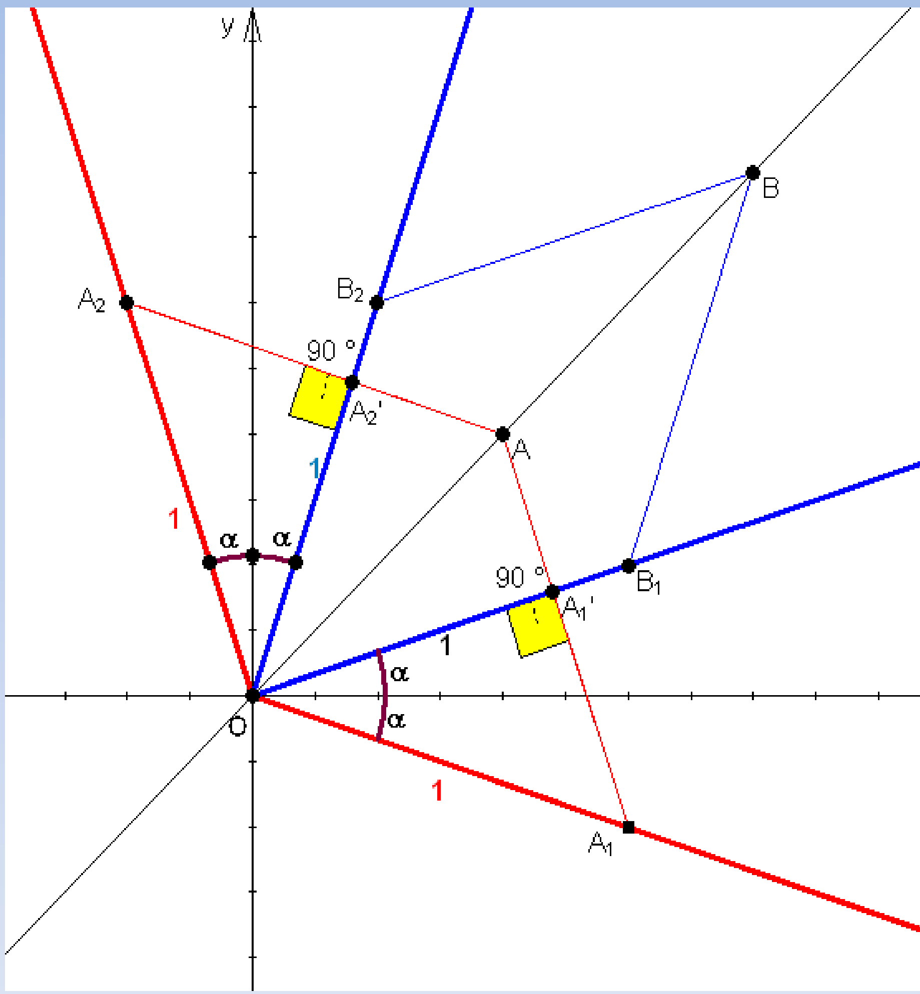


Rechte Winkel

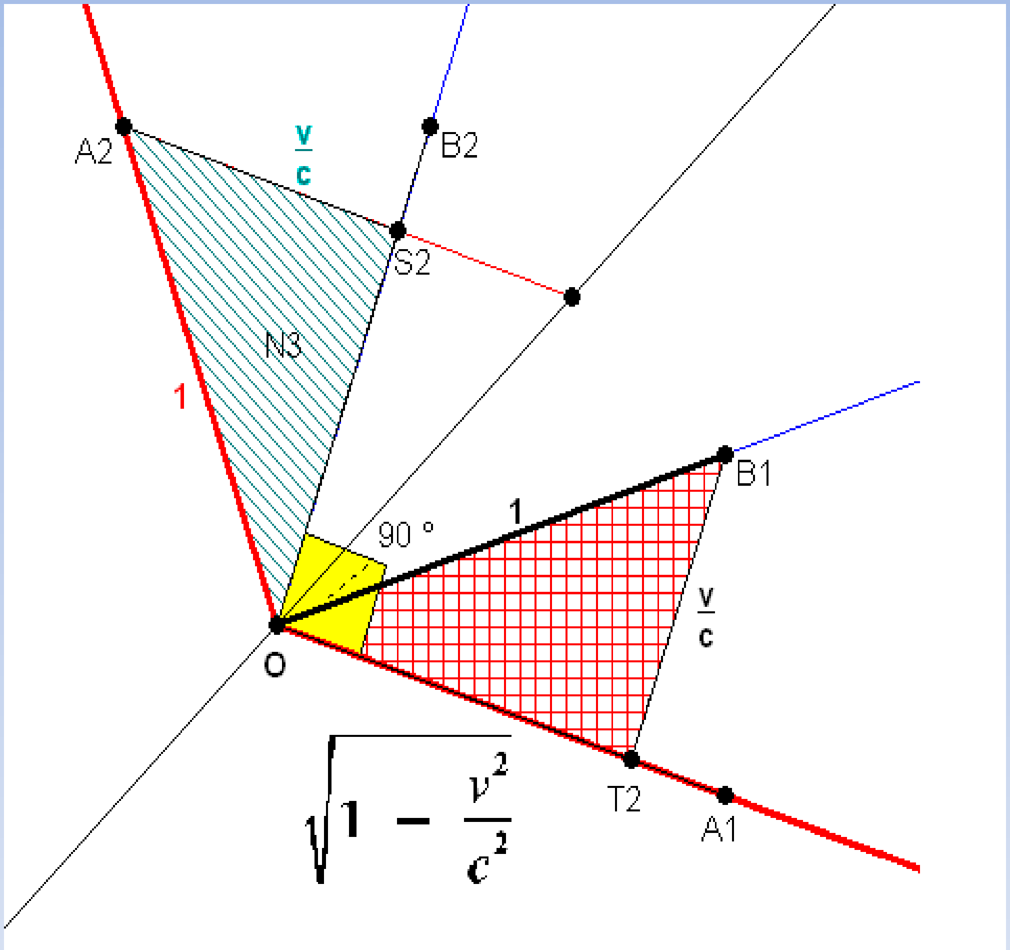


Wo treten in der neben-stehenden Abb. Rechte Winkel auf?

Rechtwinklige Dreiecke



Die Halbgeradenpaare OB_1 und OA_2 sowie OA_1 und OB_2 sind orthogonal zueinander, daher sind die Dreiecke $OA_2'A_2$ und $OA_1'A_1$ bei A_2' bzw. A_1' rechtwinklig.

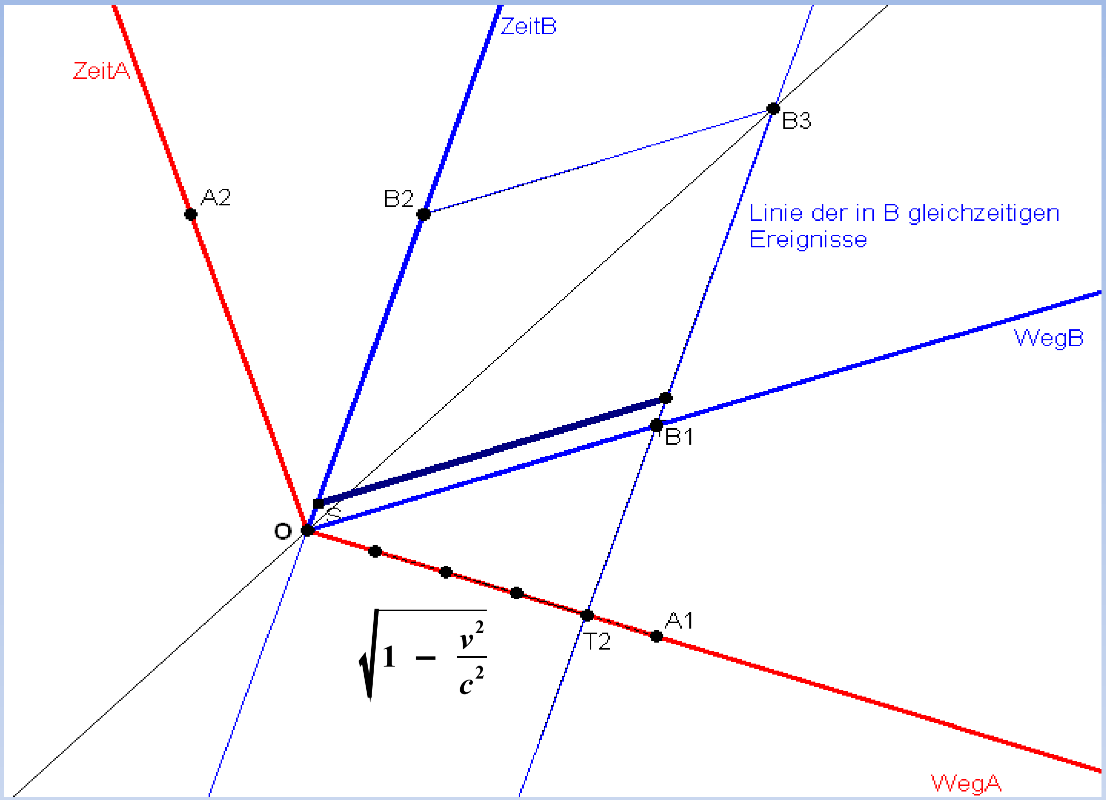


Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$OS_2 = OT_2$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Die Lorentzkontraktion



Ein Stab, der die Eigenlänge 1 hat und sich für den roten Beobachter mit der Geschwindigkeit v bewegt, erscheint dem roten Beobachter verkürzt um den Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

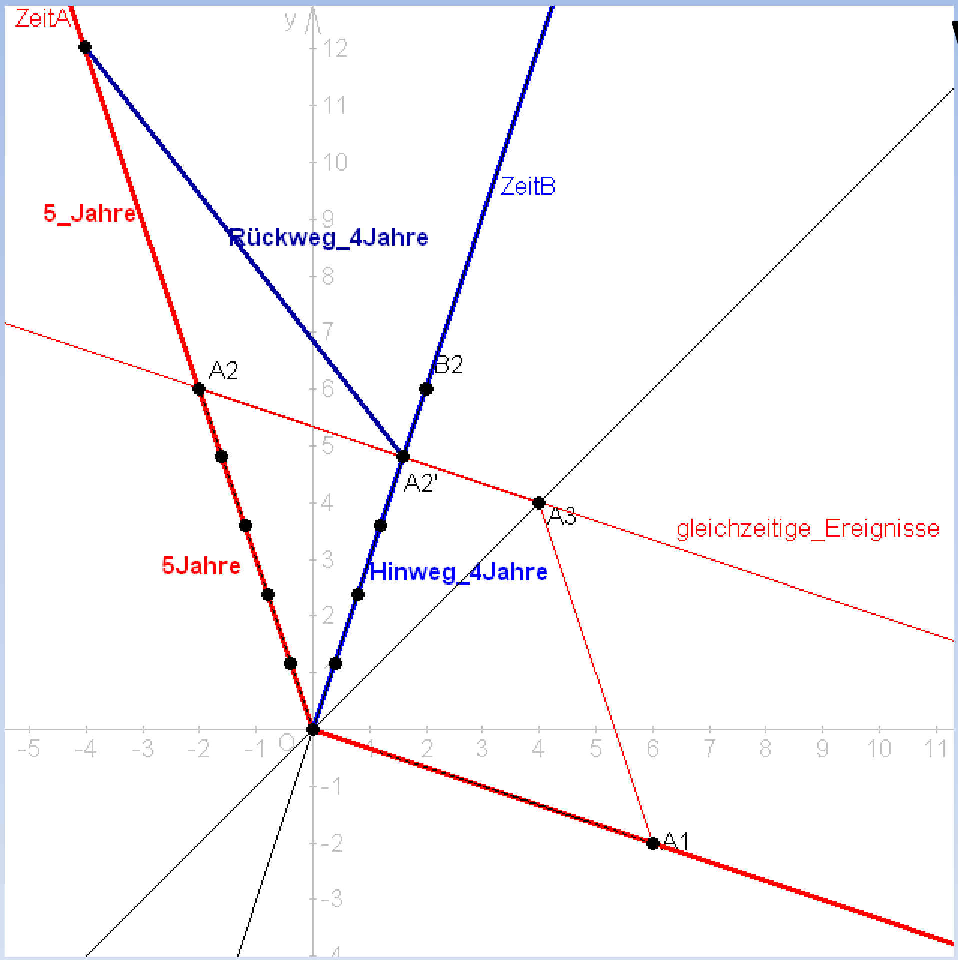
Das Zwillingsparadoxon

Von zwei genau 20 Jahre alten Zwillingen Albert und Ben geht der Letztere auf eine Reise in einem Raumschiff, das sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}6c$ von der Erde weg bewegt.

Genau dann, wenn Albert 25 wird, kehrt das Raumschiff um und fliegt nun mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}6c$ auf die Erde zu.

Wie alt sind die beiden Zwillinge bei Bens Rückkehr?

Grafische Lösung



Wenn Albert 25 wird (Punkt A2), ist Ben 24 (Punkt A2'). Für den Rückweg brauchen beide die gleiche Zeit, also Albert auf der Erde 5 Jahre, Ben 4 Jahre. Daher ist Albert bei Bens Rückkehr 30, Ben 28 Jahre alt.

Zwillingsparadoxon

- ***Vielen Dank!***