

"Schulmathematik" versus "Unimathematik": Sichtweisen eines Fachmathematikers

Tobias Kaiser

Universität Passau

25. April 2015

1. Antithesen

- ▶ Warum muss ich mich an der Uni mit Galoistheorie beschäftigen? Die ist so schwer und in der Schule brauche ich sie später bestimmt nicht.
- ▶ Den Schulstoff kann ich doch schon. Jetzt möchte ich lernen, wie man diesen später unterrichtet.
- ▶ Wozu die ganzen Beweise? Es reicht doch, rechnen zu können.

Solche Aussagen hört man immer wieder von den Studierenden.

2. Reflektion

- (I) Ist die Mathematik an der Uni tatsächlich grundverschieden von der Schulmathematik?
- (II) Werden die Studierenden des Lehramts Mathematik mit den Fachvorlesungen nur getriezt und von der Beschäftigung mit wichtigeren Kompetenzen wie Didaktik oder Psychologie abgehalten?
- (III) Hat die universitäre Fachausbildung keinen Einfluß darauf, ob jemand später eine gute Lehrerin oder ein guter Lehrer ist?

3. Thesen

- (I*) Es gibt keine Schul- vs. Unimathematik. Der Stoff der universitären Vorlesungen erweitert die schulischen Inhalte.
- (II*) Für einen Lehrer an einer höheren Schule ist es unabdingbar, von seinem Fach eine Ahnung zu haben.
- (III*) Nur wer sein Fach versteht, kann es auch gut unterrichten.

zu I*:

- ▶ Es gibt nur eine Mathematik. Mathematik ist eine universelle Wissenschaft.
- ▶ Beispiele für die Einbettung des Schulstoffes in die universitären Vorlesungen.

Vorlesung "Grundlagen der Geometrie"

In dieser Vorlesung wird axiomatisch die ebene Geometrie untersucht.

Definition:

Eine **Ebene** ist ein Paar (E, G) von Mengen, wobei E die Menge der Punkte der Ebene und G eine Menge von Teilmengen von E ist, deren Elemente Geraden heißen, so dass folgende Axiome (Inzidenzaxiome) gelten:

- (1) Zu je zwei Punkten $A, B \in E$ gibt es eine Gerade $g \in G$ mit $A, B \in g$.
- (2) Zu zwei verschiedenen Punkten $A, B \in E$ gibt es höchstens eine Gerade $g \in G$ mit $A, B \in g$.
- (3) Auf jeder Gerade liegen mindestens zwei verschiedene Punkte.
- (4) Es gibt drei Punkte in E , die nicht auf einer Geraden liegen.

Euklidische Ebene:

Hier ist $E = \mathbb{R}^2$. Eine Gerade ist gegeben durch die Gleichung

$$ax + by = c$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, a, b nicht beide 0.

Axiome, die für die Euklidische Ebene gelten:

- A Inzidenzaxiome
- B Streckenaxiome
- C Bewegungsaxiome
- D Archimedisches Axiom und Vollständigkeitsaxiom
- P Parallelenaxiom

Diese Axiomenliste beschreibt die Euklidische Ebene vollständig.

Satz von Hilbert:

Die Euklidische Ebene ist die einzige Ebene (bis auf Isomorphie von Ebenen mit Strecken und Bewegungen), die die Axiome A-D und P erfüllt.

→ **Hilbertprogramm**

Parallelenaxiom:

Zu einer Geraden $g \in G$ und einem Punkt $A \in E$ **gibt es genau** eine Parallele durch A zu g .

Das Parallelenaxiom ist **unabhängig** von den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie (Gauß, Lobatschewski, Bolyai).

→ **Hyperbolische Ebene**

- ▶ **Absolute Geometrie:** Alle Sätze, die sich aus den Axiomen A-D herleiten lassen.
- ▶ **Euklidische Geometrie:** Alle Sätze, die sich aus den Axiomen A-D und P herleiten lassen (d.h. alle Sätze, die in der Euklidischen Ebene gelten).
- ▶ **Hyperbolische Geometrie:** Alle Sätze, die sich aus den Axiomen A-D und $\neg P$ herleiten lassen (d.h. alle Sätze, die in der Hyperbolischen Ebene gelten).

Sätze der Absoluten Geometrie:

- ▶ Kongruenzsätze
- ▶ Winkelsumme im Dreieck kleiner gleich 180°
- ▶ Existenz von Parallelen

Sätze der Euklidischen Geometrie:

- ▶ Satz des Pythagoras
- ▶ Strahlensatz
- ▶ Winkelsumme im Dreieck gleich 180°
- ▶ Eindeutigkeit von Parallelen

Sätze der Hyperbolischen Geometrie:

- ▶ Winkelsumme im Dreieck kleiner 180°
- ▶ Existenz von unendliche vielen Parallelen

Verbindung zum Schulstoff:

- M 5.2 Weiterentwicklung geometrischer Grundvorstellungen (u.a. parallele Geraden)
- M 7.1 Figurengeometrie: vom Zeichnen und Beschreiben zum Konstruieren und Begründen (u.a. Innenwinkelsumme)
- M 7.5 Figurengeometrie: Das Dreieck als Grundfigur (u.a. Kongruenzsätze)
- M 8.4 Strahlensatz und Ähnlichkeit
- M 9.5 Das rechtwinklige Dreieck (Satz des Pythagoras)
- M 11.2 Koordinatengeometrie (im Raum)
- M 12.3 Geraden und Ebenen (im Raum)

Die Vorlesung "Grundlagen der Geometrie" ist natürlich ein Paradebeispiel.

Aber auch bei einer Vorlesung wie "Algebra und Zahlentheorie" sind die Verbindungen erkennbar (Aufbau des Zahlensystems, Primzahlen, Quadratwurzeln, Polynome, Auflösen von Gleichungen, Kreiszahl π).

zu II*:

- ▶ Nur wer von seinem Fach eine Ahnung hat, kann es glaubhaft weitervermitteln und Interesse daran erwecken (wir wollen auch keine Sportlehrer, die die 100 m nie schneller als 20 Sekunden gelaufen sind, oder Musiklehrer, die lediglich die Blockflöte mehr schlecht als recht beherrschen).
- ▶ Man muß auf weiterführende Fragen eingehen und gute Schüler fördern können.
- ▶ Ein Lehrer muss befähigt sein, auf zukünftige inhaltliche Entwicklungen zu reagieren; der Schulstoff wird sich auch weiterentwickeln.

zu III*:

- ▶ Ohne gute Fachausbildung besteht die Gefahr, dass sich unbemerkt Fehler einschleichen.
- ▶ Die Perspektive über dem Schulstoff erlaubt einen selbstsicheren Unterricht (Erfahrungsberichte von Lehrern), der bereichernd für die Schüler ist.

3. Synthesen

- ▶ Die hohen fachlichen Anforderungen müssen beibehalten werden.
- ▶ Die Verbindungen zum Schulstoff müssen besser herausgearbeitet werden.
- ▶ Die Kommunikation und Zusammenarbeit mit der Didaktik ist von großer Wichtigkeit.